線形代数学１質問の解答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No.1 (１９９９年４月１９日) の分

問． 行列の掛け算の意味を教えてください．

答． 連立１次方程式を，行列 (やベクトル) を使って，$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と表すことができるというのが，行列の掛け算を考える (とりあえずの) 意味になります．また，連立１次方程式の解法のために，行列の基本変形ということを説明しますが，それを行列の掛け算と関係づけることが理論のキーポイントとなります．また，後に，線形写像を行列で表現するのですが，そのとき，行列の積は，写像の合成，つまり，写像を続けて行うことに，ちょうど対応しています．このような理論的背景から，行列の積は定義されているのです．

問． 行列は誰が考えたのですか？

答． １９世紀の数学者ケーリー (Cayley) が最初に発見したと言われています．本格的に研究され始めたのは，２０世紀に入ってからで，量子力学の発見が大きな契機になったといわれています．そういう意味で，行列というのは，比較的新しい対象といえるかもしれませんね．

問． なぜ行列というものはあるですか? 行列はどのような分野で役にたちますか？

答． 行列に割り込むのはルール違反です．それはともかく，多くの実験データ，統計データなどを処理するのに行列の考え方は有用です．というより，それを避けていては，実際仕事にならないのではないでしょうか？君たちの先輩に，行列をまったく使わずに研究や仕事ができるか聞いてみてください．数理科学，すなわち，少しでも数学あるいは数値が関係する学問において，行列は役にたちます．そういう意味で，線形代数学は，微積分学と並んで，すべての数理科学の基礎科学であるといえます．しっかり勉強しましょう．と書いていますが，一方では，役にたたなくったっていいじゃないか，とも思います．森 博嗣 (もり ひろし) という作家の推理小説の主人公である犀川創平助教授のセリフに，次のような内容のものがあったと記憶しています：「人間だけが役にたたないことを考えられる．役にたたないことを考えることこそが人間的である．役にたたないことを考える者のみが将来について考えられるのである」

問． $m \times n$ 型と $n \times r$ 型の行列の積が定義されますが，それ以外の場合は必要ないのですか？

答． 定義する必要はないです．

問． なぜ行列に商 (割り算) がないのか知りたいです．

答． 単純な意味では確かにありません．しかし，逆数のような役割をする逆行列 A^{-1} という概念はあります．(逆行列の存在には，A に条件が必要ですが．) したがって，分数のようなものとして，$A^{-1}B$ と BA^{-1} が考えられます．しかし，行列の世界なので，これらは区別する必要があります．

問． スカラーとはどういう由来の言葉ですか？

答． 英語で scalar ですが，目盛りという意味の scale からきているのでしょうか？よく使う言葉なのですが，詳しく知りません．誰か知りませんか？

問． 行列のスカラー倍は，複素数倍の場合も同じ定義でよいのですか？

答． よいです．

問． 行列と普通の数との違いは何ですか？

答． いろいろ違いがありますが，やはり，AB と BA が一般には異なることは大きな違いですね．

問． 行列というのは新しい数の概念なのでしょうか？

答． 数とは何かということ自体が難しいのですが，足し算，スカラー倍，掛け算ができるという意味では確かにそうかもしれませんね．

問． 線形代数学の線形とはどういう意味ですか？線形代数学と行列の関係は？

答． 線形というのは大切な考え方です．線形ということが理解できれば，線形代数学の真髄がわかったことになります．線形代数学は，極言すれば，線形写像の理論です．線形写像というのは，ベクトルをベクトルに写すもので，その際，ベクトルの足し算，スカラー倍を保存するもののことです．その線形写像は，実は，行列で表現できるのだということが，後期に話す内容の中心です．線形代数学と行列はこのように密接な関係にあります．

問． 対角行列はどういう特徴があるのですか？

答． 成分に 0 が多いです．基本単位ベクトル $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ というものを考えますが，対角行列 A については $A\mathbf{e}_i$ は $\mathbf{e}_i$ のスカラー倍になります．

問． 行列でも $AAA = A^3$ などと書いても本当によいのですか？

答． $(AB)C = A(BC)$ が成り立つので，とくに $(AA)A = A(AA)$ となるので，紛れがないから，そう書いてもよいわけです．

問． 単位行列は，高校で E と書きましたが，講義では I を使いました．どちらでもよいのでしょうか?

答． どちらでもよいです．同僚の話によれば，I は英語 identity の頭文字で，E はドイツ語 Einheit

の頭文字とのことですが，詳細は未確認です．まあ，こういうことは，あまり気にしなくてもよいです．講義では I の方を使っていきますが，たとえば，テストで E を使ったら減点などといった馬鹿げたことは，大学ではありません．すくなくとも私 (石川) はしません．

問． 単位行列の次数の決め方はありますか？

答． 文脈で判断します．とくに次数を明記したいときは，I_2 とか，I_3 などと書きます．

問． 零行列を O と表すとのことですが，高校では $\mathbf{O}$ (太文字？) と習いました．どちらでもよいですか？

答． どちらでもよいですが，零ベクトルを太文字で $\mathbf{o}$ と書くので，それと区別するためには，教科書どおりに O と書いた方が良いかもしれませんね．

問． $AI = A$ は，A が正方行列でなくても成り立ちますか？

答． 成り立ちます．

問． $(AB)C = A(BC)$ が成り立つということですが，証明してください．

答． 講義では証明を省略してしまいました．教科書 pp.6–7 を見てください．

問． 対角行列は，対角成分以外がすべて 0 とのことですが，対角成分に 0 があったら対角行列とは言わないのですか？

答． 対角成分に 0 があっても対角行列といいます．

問． クロネッカーのデルタは，どういう時に使うのですか？重要ですか？

答． いろいろな場面で使います．たとえば物理の本を見たら，必ず書いてあると思います．日常的によく使う記号なので，あまり意識しませんが，空気のように重要ともいえます．

問． 計算のミスを防ぐ方法はないですか？

答． “Be careful!” ということでしょうか．また，理論を勉強することで，計算に見通しをつけたり，複雑な計算をしなくてもよい方法を身につけるのも，結果的に計算ミスを防ぐことになります．

問． 3 次の正方行列にケーリーハミルトンの定理のようなものはないでしょうか？

答． あります．一般の n 次正方行列に対してもあります．しかし，基本的な理論の本筋とあまり関係しないので，この講義では触れない予定です．

問． $AB = BA$ となるための一般的な条件は存在しますか？

答． このような時，行列 A と B は可換 (あるいは交換可能) であるといいます．いつ A と B が可換であるか，ひとことで述べられる条件は残念ながら，ないと思います．ただし，どんな n 次正方行列とも可換であるような n 次正方行列は，n 次単位行列のスカラー倍であることが知られています．

問． プリントの問題の別解として，$A^2 - 2A + I = (A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = O$ でも良いですか？

答． OK です．これの方が，私 (石川) の解答例より良いですね．

問． 数式のあとの番号 (1.3) 等は何の意味がありますか？

答． 数式の通し番号です．

問． 行列の固有値というものを以前少しだけ勉強したことがありますが，固有値はどういう意味を持っているのですか？

答． 固有値に関しては，後期に詳しく説明します．いろいろな分野で重要な概念です．

問． 零因子の概念がわかりません．

答． 教科書には出てこないと思いますが答えましょう．零因子 (れいいんし，ぜろいんし，などと読みます．だんごではありません．念のため) には，左零因子，右零因子があります．いま，扱う行列を n 次正方行列に限定して説明すると，零行列でない n 次正方行列 A が左零因子であるとは，零行列でない n 次正方行列 B が存在して，$AB = O$ となるときに言います．右零因子も同様に定義します．正方行列の場合，左零因子は右零因子にもなり，右零因子は左零因子にもなることがわかりますが，このことは，線形代数学を学んでいけば自然にわかるようになるので，それまで待っていてください．

問． エジプトにあるピラミッドは，数学的に計算されている構造物だと言われますが，当時の数学者の力でできたでしょうか？

答． 私 (石川) は詳細は知りませんが，当時の数学も，(とくに，暦と関係する天文学などは) かなり高度に発展していたと言われています．ただし，その当時，数学者とか数学とかいった概念 (区別) があったとは思えませんが．

問． 「定義しない」の意味がよくわかりません．

答． スポーツのルールが，数学では定義にあたります．ルールの決め方で，そのスポーツがおもしろくなったり，つまらなくなったりします．歴史的要因でルールが決まっていることもあります．とにかく，定義はあくまで便宜上の決め事です．どう定義しても，定義しなくても，もちろん自由なのですが，

それでは人類の共通財産にはなりませんね．数学でも，なるべく自然に，役にたつように，歴史にのっとって，いろいろなことを定義していきます．そして，数学のいろいろな定義は，(細かいことはのぞいて) 万国共通です．ロンドンでも，ニューヨークでも，ナイロビでも，フィージー諸島でも同じ定義を採用しています．それが数学のよいところです.「定義しない」のもそのような理由からです．定義しないのが世界標準だからです.

問． 大学の数学では $\Longleftrightarrow$ はどれくらい使った方がよいでしょうか？

答． 自由に使ってよいです．ただし，この記号は，あくまで「必要かつ十分である」という意味なので，そうでない場合は使わないでください．また，学校でのテスト，レポートの場合はよいですが，もっとフォーマルな場 (論文，会社での企画書，冠婚葬祭の案内など) ではなるべく差し控えたいですね.

問． 先生は自分のひげは気にいっていますか？

答． 気にいっています．(こういう質問も嫌いではないですが，今後は講義と関係することにだけ答えることにします．)

問． プリントは返却してもらえますか？

答． 希望者に返却する予定です．しかし，まだ名簿が整っていなくて，記録できません．もう少し後になれば返却可能になります.

問． 高校数学と大学数学の違いはあるのでしょうか？高校で習う行列と，大学で習う行列に違いがありますか？

答． 本質的な違いはありません．程度の違いだけです．高校や大学の先生で，高校の教科と大学の教科は同じ名前がついていてもまったく関係がない，などとおっしゃる方がおられるかもしれませんが，私 (石川) はそうは考えません．(教育的配慮は理解しますが．) たとえば，行列なら，高校では 2 行 2 列の行列が中心だったと思います．一方，大学では一般の型の行列を扱います．しかし，ともに同じ行列に関する理論には変わりありません．といって，これから大学で，高校数学を単に一般化して学んでいくというわけでは決してありません．高校で習ったことを，さらに高い立場から再認識しなおし，視野をひろげ，より理解を深めていこうという意味あいが，大学の数学 (学問) にはあるのです.