幾何学１質問の解答　担当教官 石川 剛郎

No. ８ (１９９９年6月３０日) の分

問．ガウス・ボンネの定理の左辺は，閉曲面の面積要素にガウス曲率をかけて積分したものですが，どのような意味なのですか？右辺は，2π にオイラー標数をかけたものですが，これは一体何なのですか？これが等号で結ばれるのは，すごい意味だと思うのですが．

答．左辺はそういう意味です．だから，閉曲面のリーマン計量を決めれば，決まる数です．右辺は，閉曲面の３角形分割を決めれば，決まる数です．左辺は，３角形分割とはまったく関係のない数ですね．右辺は，リーマン計量とはまったく関係のない数ですね．それが等しいということは，信じられないですね．でも成り立つのです．すごいことですね．この等式から，左辺は，実は，リーマン計量のとり方に依存しない数であることがわかり，同時に，右辺は，実は，３角形分割のとり方に依存しないということがわかります．すごいです．

問．講義の最後で，ガウス・ボンネの定理は，微分幾何と位相幾何をつなぐもの，とおっしゃっていましたが，よけいに意味がわからなくなってしまいました．

答．そうでしたか．それは，微分幾何 (differential geometry) や位相幾何 (topology) が何をさしているのか，わからなかったから，と推測します．あとの方で少し解説しているので参照してください．

問．閉曲面の定義で，リーマン計量を付与されている，という条件をつけましたが，どういうことですか？

答．ガウス・ボンネの定理は，ガウス曲率の積分が関係するので，リーマン計量が与えられていないと話になりません．しかし，結論として，その積分の値が，実はリーマン計量の与えかたには依存しない，ということをガウス・ボンネの定理は主張しています．ところで，定義の前半部をみたすもの，つまり，コンパクトでハウスドルフな C^∞ 多様体には，常にリーマン計量が存在するということが知られています．(「１の分割」というもの知っていれば，それほど難しいことではありません．)

問．閉曲面の定義は，コンパクト，ハウスドルフで，各点の近傍で，$\mathbf{R}^2$ の開集合と同相なものがある，というものではなかったのでしょうか？

答．確かにそうです．詳しく言うと，上の定義は,「２次元コンパクト位相多様体」の定義です．講義でやったのは,「リーマン計量の与えられた，向きづけられた２次元コンパクト C^∞ 多様体」の定義です．異なる対象に，同じ「閉曲面」という名前を付けているわけです．ここでは，主に議論したい対象を，短い名前で規定したかったので，このようなネーミングになりました．確かに，紛らわしいですね．でも，これは致し方ないことなのです．というのは，われわれは，数学を説明するのに，日常用語を使います．数式や専門用語ももちろん使いますが，それを知らない人 (通常，世界中でも数人いるかいないかの，自分と専門が非常に近い研究者，以外のすべての人，と仮定すべきでしょう) に説明するためには，専門用語を，なるべく日常用語にかみくだいて解説する必要があるし，そうすべきと考えます．ところが，日常用語のボキャブラリーは，(日本語，英語に限らず) **豊富な数学世界**を記述するには，あまりにも少ないのです．極端な話，１つの数式を誤解なく日常用語で説明するためには，１００ページ以上の文章が必要なこともあるでしょう．これが**数学者の悩み**です．はがゆい限りです．靴の上から足を掻くようなものです．ですから，どうしても時間の都合で，説明を省略せざるを得ないことがほとんどです．あとは，**皆さんの良識や数学的センス**に期待するしかないのです．言葉 (用語) は大切ですが，言葉に振り回されてはいけません．その背後にある “数学的実体” に注目するようにしましょう．(これがなかなか難しいのですが．)

問．ガウス・ボンネの定理は閉曲面のときだけ成り立つのでしょうか？

答．そうです．もちろん，登場する概念を広い意味にとらえ，定理の両辺を，適切に一般化して，閉曲面以外にも拡張するという試みはあります．それが数学の発展というものです．

問．ガウス・ボンネの定理は，どのようないきさつで発見されたものですか？ガウスは有名ですが，ボンネという人はどんな人ですか？

答．ボンネ (Bonnet) は１９世紀の幾何学者で，極小曲面 (たとえば石鹸膜など) の研究でも有名です．でも，ガウス・ボンネの定理の成立のいきさつは少し調べましたが，わかりませんでした．

問．今回のガウス・ボンネの定理には，正直いって感動しました．

答．そういってもらえると，教えがいがあるというものです．

問．微分形式の積分の，座標変換による不変性のところで，$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} > 0$ と仮定していましたが，なぜですか？

答．座標変換という場合，ヤコビアン $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ が零ではない，ということは常に仮定しています．ヤコビアンが正と仮定すると，講義で説明したように，積分の値が変わらないのですが，負の場合は，実は，積分の値が，符号の分だけ変わってしまうのです．たとえば，$x = -u, y = v$ という座標変換を考えると，$dx \wedge dy = -du \wedge dv$ となり，B を (x, y) 平面の単位円とすると，$\int_B dx \wedge dy = \int\int_B dxdy = \pi$ となりますが，一方，(この変換で B は B に移ることに注意すると) $\int_B(-du \wedge dv) = \int\int_B dudv = -\pi$ となって，符号が変わってしまうわけです．$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} > 0$ のとき，その座標変換は，**向きを保つ**座標変換と言います．

問． ストークスの定理と，序論９で習ったグリーンの定理は同じものですか？

答． そうです．ただ，ストークスの定理という場合は，高次元の場合の一般化された類似の定理を含めて，そう呼ぶことも多いようです．他の人の補足説明に「ストークスとグリーンが同時期に発表したが，実は同値だった」という推測が書いてありますが，そういういきさつがあったのかも知れません．詳細は不明です．それはともかく，この種の定理は，誰が最初に発見したかを決めるのは，むずかしいことが多いようです．また，解答書 No.6 に関連する話題が出ているので，それも参照してください．

問． 今日，ストークスの定理が出てきましたが，僕の知っているのと，一見違うように思えたのですが，気のせいでしょうか？

答． ベクトル解析や電磁気学で出てくるストークスの定理ですね．表現が異なるだけで，同じ定理です．

問． 微分形式の積分を $\int_C \varphi$ などと書いていますが，$\int$ のうしろには，ふつう $d(\ )$ がつくと思うのですが．

答． 微分形式 φ の中に，すでに du とか dv が入っているわけです．だから，これでいいのだ．

問． 教科書 p.124 の (1.13) から (1.14) への変形がわかりません．

答． p.75 の (5.3) です．

問． ヤコビアンで使う ∂ の記号と，境界を表す意味で使う ∂ は同じに見えますが，何か関係があるのでしょうか？

答． ヤコビアンは，偏微分を使って定義されるので，ヤコビアンで使う ∂ は，偏微分の記号から来ていると推測されます．一方，境界の記号の ∂ は，どういう由来があるんでしょうね．誰か知っていますか？

問． ３次の微分形式というものはありますか？

答． あります．でも，２次元空間上では，３次微分形式は 0 しかないので，扱いませんでした．詳しくは，多様体の教科書を見てください．

問． 曲面の３角形分割というのは，どういう意味ですか？３角形分割できるということは，多面体ということですか？

答． ここで言っている「３角形」とは，通常の意味の３角形より，広い意味で使っています．まず，曲面の定義に出てきた，(曲面をパラメーター付ける) 平面領域 D_α 上の３角形を，辺の曲がりを許したものと考え，曲面上の３角形とは，ある (座標近傍) U_α に含まれていて，$\varphi_\alpha : D_\alpha \to U_\alpha$ を通して，D_α 上の３角形になるもの，を指しています．したがって，３角形といっても，平面に含まれた通常の３角形ではなく，それを少し歪ませたものをイメージするとよいでしょう．そして，曲面を，そのような広い意味の３角形で分割するのですが，いくつかの条件を課します．特に，となりあう３角形の辺が一致するとか，ある点を頂点とするような３角形は有限個しかない，という条件を満たさなければなりません．くわしくは，教科書 pp.139–140 に定義されています．

問． なぜ３角形分割なのですか？４角形分割は考えないのですか？４角形分割でも，オイラー標数が同じく求まるのではないですか？

答． 君の指摘は，ある意味で，正しいです．**胞体分割**という概念があり，それに相当します．幾何学４の講義で扱うことになると思います．それに対して，３角形分割は，**単体分割**とも呼ばれます．

問． オイラー標数の意味はなんですか？４面体，６面体，８面体などについて考えると，いずれもオイラー標数は 2 になりますが，この数が等しい曲面にはどのような共通点がありますか？

答． 球面と同相であるという共通点があります．

問． オイラー標数を求めるとき，頂点や辺は重複して数えるのですか？

答． 重複しては数えません．たとえば，(中味のつまった) 正方形 (閉曲面ではないですが) に，対角線１本という場合，頂点の個数は 4，辺の個数 5 で，面の個数は 2 です．したがって，オイラー標数は，$4-5+2=1$ です．

問． 平面上に有限個の直線が引かれているとき，それらによって区切られる有界な領域と，非有界な領域との個数を調べる方法を，どこかで教わったとき,「オイラー数」という言葉を聞きましたが，今回のオイラー標数と関係ありますか？

答． おおいに関係あります．平面に “無限遠点” を付け加えて１点コンパクト化すると，球面になります．すると，３角形分割ではないけれど，胞体分割が得られます．非有界な領域は，丁度，無限遠点を頂点とするような胞体に対応します．また，オイラー標数は，この場合も，(頂点の個数) − (辺の個数) + (面の個数) で求めることができ，それが 2 に等しいことから，情報が得られます．オイラー数もオイラー標数も同じ意味です．

問． コンパクトな曲面を３角形分割すると，なぜ有限個の３角形になるのですか？

答． ３角形分割の定義を詳しく述べなかったのですが，局所有限性の条件 (p. 140 の条件 (f)) が効いてきます．いま，仮に，無限個の３角形で分割されたとすると，その頂点も無限個あることになり，すると，コンパクト性から，それは集積点をもち，その集積点の近傍には有限個の３角形しかないという条件に反することになります．

問． ３次元の多様体を分割したとき，点，辺，面，体の個数には何か関係があるのでしょうか？

答．３次元閉多様体のオイラー標数は 0 であることが知られています．ですから，(点の個数) − (辺の個数) + (面の個数) − (体の個数) = 0 となります．この場合,「体」は３次元単体 (= 正４面体) の意味ですね．

問．オイラー標数が正，零，負だと，どう違いが出てきますか？また，ほかの講義で，標数が正に限った話をしていたのですが，正標数のときとは，そのような閉曲面 (?) の場合を言っているのですか？

答．前半は良い質問ですね．球面のオイラー標数は 2 で正，トーラスは 0，複数乗りの浮袋のオイラー標数は $2-2g$ で負，です．(g は穴の個数，いわゆるジーナス)．ガウス・ボンネの定理と関連して，ガウス曲率が正の計量が球面には入り，ガウス曲率が零の計量がトーラスには入り，複数乗りの浮袋にはガウス曲率が負の計量が入ります．それぞれ，**楕円型曲面，放物型曲面，双曲型曲面**とよばれます．後半は，代数の体論などでいう，標数が正ということと混同しているのでは，と推測します．(そのばあい，標数とは，1 を何回たしたら 0 になるかという，その数でしたね．)

問．トーラスの場合，$\chi(S) = 2$ でしょうか？

答．トーラスのオイラー標数は 0 です．

問．位相というものがよくわかりません．

答．私 (石川) の考えでは，**位相についてわかったかどうかが，数学科でまともに勉強したかどうか，の１つの目安になる**と思っています．位相というのは，一言でいうと，**空間の連結性，写像の連続性を明確に考察するための根源的概念**と言えます．ぜひ，数学序論２ (ユークリッド空間の位相) と数学序論１１ (位相空間入門) を復習してください．とくに，写像が連続であることの定義，空間の連結性，コンパクト性や，ハウスドルフ性など．

問．閉曲面の定義で，なぜハウスドルフという条件をつけたのですか？その条件を使っていないように思えます．

答．なるほど．でも，考えている曲面にハウスドルフという条件がないと，３角形分割ができません．つまり，オイラー標数を考える箇所で (少なくとも) 使っています．もちろん，$\mathbf{R}^3$ の曲面を考えている限りは，自動的にハウスドルフになるので，いちいち条件を言わなくても良いのですが，抽象的に曲面を考える際は，ハウスドルフの条件を付けないといけないわけです．

問．ハウスドルフ性のない空間で自然な空間，つまり，ハウスドルフでないように構成した無意味な空間でないもの，はありますか？

答．うーむ．ハウスドルフでない空間の例は，教科書 p.138 の前半に説明されています．これが不自然なものと言われると，それまでですが，ともかく，議論が適用できる範囲を明確に規定する，というのが，大事なわけです．ハウスドルフという条件が必要なのに，その条件を明示しないと，ハウスドルフではない空間に，定理を適用して，失敗する人が現われることを防止しているわけです．安全のためにいちいち言っている，ということです．皆さんが，外出するときに，親が，いちいち，車に気をつけろ，生水は飲むな，というかもしれないけれど，(言わないかもしれないけれど)，親に向かって，うっせー，などと言わないで，親の愛情に感謝しましょう．感謝できるぐらい大人になりましょう．

問．なぜ体を K と書くことが多いのですか？

答．ドイツ語の Körper (体，からだ) の頭文字です.「体」という訳語もドイツ語からの翻訳と記憶しています．戦前のドイツの輝かしい抽象代数学の伝統ですね．でも最近は，F を使うことも多いようです．英語の field の訳です．

問．微分幾何と位相幾何のそれぞれのメリット，デメリットを教えてください．僕は最初のころ，微分幾何と位相幾何とは，けっこう違う分野だと感じていました．しかし，最近 (とくに今日) 閉曲面などの言葉が出てきて，両者の関連性をうすうす感じました．しかし，２つの分野が分かれているということは，それぞれ良いところ，(もしかしたら悪いところ) があるのでは，と思いました．また，以前「代数幾何」という言葉が付いた本を，ちらっと目にしました．もし，スペースが有りましたら，代数幾何についても教えてください．

答．微分幾何は，図形，とくにいろいろな構造が与えられている多様体の性質，たとえば，曲率，体積，などの計量的性質，対称性など，比較的上部構造を調べる幾何学です．ガウス曲率は典型的対象です．位相幾何は，図形，これには多様体も含まれますが，の位相構造や可微分多様体の構造などの，比較的下部構造に注目し，調べる幾何学です．オイラー標数は典型的対象です．微分幾何では，微分積分学や微分方程式論や表現論，などなど多くのことを応用します．位相幾何でも，いろいろなことを利用します．とくにホモロジー代数，群論，環論など，(最近では最先端の解析学)，を経由して不変量を作ります．一方，代数幾何は，図形，とくに多項式で定義された代数多様体の性質を，数学全般を応用して研究する，幾何学です．(代数曲線の種数は典型的対象です．) あるいは，そのような代数多様体の幾何学的研究を代数学の研究に還元する，という側面もあります．たとえ話をすると，３角形の内角の和は 180 °というのが微分幾何，３角形 (の縁) は円周と同じ，というのが位相幾何，３角形は，３本の直線からできている，というのが代数幾何です．これはかなり言い過ぎですが．ところで，**学問は方法，あるいは方法の集積**ですね．まず，直面している問題があって，これは，演習問題などというせまい意味ではなく，ひろい意味の困難 “problem” ですが，それを解決，克服するために，われわれは適切に方法を選ぶわけですね．もし，適切

な方法がどうしても見当たらなかったら，知られている方法を自分で改良するなり，新たな方法を見い出して，解決するよう努力するわけです．すると,「良い方法」は，当然多く利用されますが,「悪い方法」は，もしあったとしても利用されず，当然自然淘汰されるわけだから，存在しなくなるのが道理です．ですから，その分野のメリット・デメリットは何か，というよりも，向き不向きというべきですね.「特長」というより,「特徴」というべきものでしょうか．私 (石川) は，上に説明した３者，あるいは，他の関連する分野も，等しく重要であると位置付けます．研究が軌道に乗っている時は，なんでもうまくいくけれど，一旦行き詰まったとき，それをのりこえようと思ったら，いろいろな方法を試行錯誤する必要が当然あるわけです．そんなときは，好き嫌いを言っている場合ではなく，関連しそうなことは，すべてを知っていなければならない，少なくとも，必要があればいつでも応用できるぐらいの情報は，どの分野についても，つねに確保していなければならない，それが理想であると考えています．また，いろいろな分野の境界というものは，当然あいまいです．世界は動いている，学問も日々発展している，分野の線引きも当然あいまいであるべきですね．そして，現在の最先端の研究では，そんな傾向にあります．もちろん，以上の説明には私 (石川) の主観が入っていることを考慮してください．他の先生にもいろいろ質問して，あとは自分で調べてね．

問．日本人の超有名な定理や，考え方を教えてください．僕は以前から，数学に限らず,「日本人が考えたこと」などが少なすぎるなと思っています．悔しいです．もしかしたら，日本人は嫌われているのではないでしょうか？

答．解答書 No.7 でフェルマー予想はワイルスという人が解決したから「ワイルスの定理」と呼ぶべき，と書きましたが，ワイルスは，志村・谷山予想 (志村五郎先生，故谷山豊先生) を解決したのだと，同僚の M 先生から聞きました．それ以前に，志村・谷山予想からフェルマー予想が導かれることが示されていたそうです．小平邦彦先生の複素多様体論，広中平祐先生の特異点解消問題の解決，森重文先生の３次元代数多様体の分類は，フィールズ賞を受賞しました．また，佐藤幹夫先生の超関数理論も有名ですね．どれも日本人による世界的に有名な業績です．この他にも様々な分野に，名前は挙げませんが，日本人による多数の理論や定理があります．(とくに私 (石川) の専門に近い分野は，さしさわりがあるので，実名をあげるのを控えます．) また，まだあまり有名ではないけれど，１００年後には評価される (かもしれない) 業績もあります (たとえば私 (石川) の定理)．どうぞ，安心してください．そもそも数学は，ギリシャ的，西欧的な文化価値基準にのっとっている学問です．他の科学分野でも大体そうです．定理とか考え方も，その基準にのっとって評価されます．私 (石川) はロシアや東欧の数学者を多く知っていますが，彼等は，日本人同様，西欧にコンプレックスを持っています．ですから，われわれが (言語も含めて) ハンディキャップを持っていることは確かでしょう．それにしては，よくやっていると思います．日本人に独創性がない，などと言いますが，それは偏見だと思います．もちろん，これからの日本人を育てる学校教育について，真剣に考えなければいけませんが．経験からすると，今のところ，日本は美しい国であり，科学技術にすぐれた国というのが，日本に対する定評であると思います．若干の成金は嫌われていますが，それは日本人だからではありません．というより，極東 (far east) の小さな島国のことはあまり関心がない，ということも多いと思います．私 (石川) の尊敬する哲学者，梅原猛先生は，これからは共生の時代であり，従来の西洋的発想だけではだめで，東洋的，日本的な考え方が，今後，大切になると言っています．数学などの科学や合理主義，人権の思想などは，西欧文化の良いところと思いますが，資源欠乏，核問題，地球温暖化，など，２１世紀に人類は解決しなければならない多くの難問に対し，われわれ日本人が，その東洋的な考え方が，たしかに，解決に貢献できるのではと期待しています．とにかく，われわれは自信を持つべきでしょうね．自信を持った上で，なるべく世界規模の観点からものを考えてみる，ということから始めると良いかもしれません．

問．アニメ「おじゃる丸」はいつ見ているのですか？

答．たまたま休みの日の朝に見て，面白いと思いました．“まったり”しているところが好きです．自分自身の楽しみのために見ました．(これは子供のためのもの，これは主婦向き，これは成人男子のため，これは老人向け，などといった区別が世の中にありますが，私 (石川) は，そんな区別に縛られて，人生を浪費したくないので，積極的に無視するようにしています．)

問．質問の例の中に,「どう考えても，これは大学生の質問じゃないだろう」と思えるものが，毎回１つは見受けられますが，あれは先生がわざと「生徒」のふりをして，質問を作って，自分で答えているのですか？

答．違います．多少文章は変えていますが，すべて皆さんの本当の質問 (real questions) です．そもそも，質問に，大学生の質問，高校生の質問，小学生の質問，主婦の質問，コギャルの質問，などという区別はありません．わからないことは何でも質問して，答えを参考に，自分で考えて吸収し，それを踏まえて，また質問する，ということで良いわけで，どういった質問をするか，ということは，あくまで，個人個人に任された問題です.「独創」は素朴な問から出発します.「裸の王様」の子供のように権威を気にせず，納得するまで考える勇気を持ちましょう．そうしながら，自分自身の知的世界を構築していってください．(最後の部分は，解答書 No.3 の最後の部分の繰り返しです．確かに進歩がないような気がしないでもないけれど，気にしない気にしない．)