幾何学１質問の解答　担当教官 石川 剛郎

No. 7 (１９９９年6月１６日) の分

問． 第１基本形式とリーマン計量との関係は何ですか？

答． 空間曲面の第１基本形式はリーマン計量であるわけですが，第１基本形式は，以前，解答で書いたように “縮尺” (しゅくしゃく) にたとえられます．その際は，空間曲面という対応物があったので，縮尺ということになりますが，リーマン計量というと，そのような対応物を必ずしも考えていません．したがって，たとえるとしたら，“縮尺” ではなく，ただの “尺” (しゃく) ですね．“ものさし”です．(ちなみに，アニメ “おじゃる丸” に出てくる “しゃく”とは違います．) その尺が，ゆがんだ “ものさし”かもしれない．でも，ともかくそれで計るということです．空間曲面という対応物に拘泥 (こうでい) しないですむので，発想がより自由になります．たとえると，リーマン計量という考え方を採用することで，空がとべるようになった，と言えますね．しかし，一方で，教科書 p.89 にあるように，その (平面上の) リーマン計量が，空間曲面の第１基本形式として実現できるか，実現できるとしたら，どのような曲面で実現できるか，という問題が重要になります．たとえると，空をとんでばかりいると足が弱るので，歩くのも大切だということです．

問． リーマン計量の「計量」というものがどういうなのか，どうもわかりません．線形代数の計量線形空間 (計量ベクトル空間) と関係がありますか．

答． 関係があります．リーマン計量を考えることは，各点の接空間に，計量ベクトル空間の構造を付与することです．そうすることにより，接ベクトルの長さ，したがって曲線の長さを，(その計量で) 計ることができるわけです．

問． リーマン計量は長さを測るだけなのでしょうか？

答． そうです．でも，長さが計れると，相当なことができます．たとえば，角度も計れます．面積も計算できます．これから説明するガウス・ボンネの定理によれば，その曲面のジーナス (種数) まで分かります．

問． ガウス曲率を第１基本形式だけから構成するということは，どういう意味ですか？第１基本形式のみに基づいた幾何学は，内在的とのことですが，内在的でないものとの違いを教えてほしいです．内在的にとらえることにどのような長所，短所がありますか？平均曲率を表せないということで，何か不都合は生じませんか？

答． ガウス曲率は，もともと第１基本形式と第２基本形式の両方を使って定義したものなのに，実は，第１基本形式だけから再構成できるということです．平均曲率は，第２基本形式にも依存するので，内在的な性質ではなく，曲面の空間への入り方を持った，いわば外在的な情報です．曲面の内在的な性質の研究も，外在的な性質の研究も，問題意識により，ともに重要です．これは，空間曲面を調べることに関して，第１基本形式だけが大切である，ということでは，もちろんありません．第２基本形式も等しく大切です．

問． 第１基本形式だけにより定まるものを調べることのメリットは何ですか？

答． メリットはたくさんあって書ききれませんが，たとえば，アインシュタインは，空間にリーマン計量を導入することにより，重力に関する理論を作りました．一般相対性理論です．また，宇宙空間は，通常，時間も入れて，４次元空間にリーマン計量があたえられたものと考えられます．その場合，宇宙空間自体が，別の大きな “いれ物”に入っているとは考えられませんから，リーマン計量だけから議論する必要が当然生じます．

問． 第２基本形式がいらないというのは，非ユークリッド幾何で，平行線公理がいらないということと同じようなものですか？第１基本形式だけで曲面がわかるのなら第２基本形式はよけいなものという感じがします．

答． 第２基本形式がいらない，とは言っていません．非ユークリッド幾何では，平行線公理がいらない，ではなく，成り立たないのです．第１基本形式だけで曲面がわかる，というわけでは決してありません．第２基本形式はよけいなものではありません．親ばなれしても，親の恩を忘れてはいけません．

問． ガウスの驚異の定理は誰が考えたのですか？

答． ガウスだと思います．

問． ガウスの驚異の定理 (Theorema egregium) は何のために考えるのですか？どのあたりが驚異なのですか？それほど驚異的であるとは思えません．素人には，どこがすごいのか分かりません．

答． 詳細は不明ですが，ガウス本人が驚いたのではないでしょうか．曲面論を独自に作りあげたガウスだからこそ，驚いたのだと思います．ガウス曲率 (本人はそうは呼ばなかったと思いますが) が，第１基本形だけに依っていることを発見して，それは予想もしなかったことだから,「びっくりしたなもー」と言ったのかもしれません．とにかく，物事に真に驚くことができるのは，そのことを日夜考えつづけて初めて可能なのかもしれませんね．どこがすごいか分からないから素人なのかもしれませんね．それはともかく，時代が流れて，その当時の最先端の結果も，次第に啓蒙，普及され，誰もが (努力すれば)

理解できるようになるのが科学の発展というものでしょうか．でも，そういう意味で，科学に驚きがなくなってきたとしたら，それは由々しきことですね．

問．“ガウスのもっともすばらしい定理” より，すばらしい定理はないですか？“フェルマーの大定理” の方が僕はすばらしいと思いますが．

答．そうですか．ところで，“フェルマーの大定理” は最近，ワイルスという数学者が証明したので，ワイルスの定理と呼ぶべきでしょうね．ともかく，どうして，君はその定理がすばらしいと思うか，その理由が知りたいですね．定理がすばらしいと思うかどうかには，もちろん個人差があります．すばらしい定理と感じるいくつかの定理が，私 (石川) にもあります．内緒ですが．でも，それらのうち，どちらが良い悪いなどと比べようがないですね．

問．曲面の構造方程式を利用する方が，別の方法でガウスの驚異の定理を証明するよりも簡単なことなのですか？

答．そういうことです．比較的見通しのよい証明になっているとは思います．それでも，簡単な計算とは思えませんけどね．

問．第１基本形式が等しいということを条件に，曲面の集合上に同値関係を入れることができますか？また，その同値類の集合には何か面白い性質がありますか？

答．非常に良い発想ですね．仮に，まぐれ当たり (失礼！) としても優秀です．言い換えると，平面上のリーマン計量の全体のうち，空間曲面の第１基本形式で実現されるもののなす部分集合に注目するということですね．これはおもしろい．さらに，等長変換で移りあうものも同値としたほうが，より自然かなと思います．そうなると，もう，プロの感覚ですね．詳細は不明ですが，いろいろ調べられているはずです．でも，それらはより深い結果のはずだから，それを理解するには，その前にいろいろ勉強しなければならないことがたくさんある，と推測されます．自分の発想に自信を持って，引き続き精進ください．

問．“非ユークリッド空間” はどのようなものとイメージしたらよいのでしょうか？存在する空間が，“ユークリッド空間” であり，具体的な幾何として，“ユークリッド空間” を考えている以上，それ以外の空間や幾何の概念は受け入れ難いです．

答．それはこまりましたね．君の疑問は，確かに一般的と思うし，何百年 (何千年?) も数学者を悩ましてきた平行線公理の問題の解決として，１８世紀後半から１９世紀前半にかけて発見されたのが，非ユークリッド幾何なので，理解し難いのはもっともです．でも，せっかく，２０世紀の数学科で数学を勉強しているのだから，がんばって理解してね．とりあえず，教科書の p.66 の例 3.7 を読んでください．

問．リーマン計量を ds^2 と書くとのことですが，これは，$d(ss)$ という意味ですか，$ds \cdot ds$ という意味ですか？

答．記号です．記号に意味はありません．(と私 (石川) は理解しています．)

問．ノートにある，“空間曲面” の情報とは，具体的に何ですか？

答．たとえば，ガウス曲率です．

問．教科書 p.87 の「リーマンの幾何学」と，教科書のうしろの広告にある,「リーマン幾何学」は同じものですか？また複素関数論で，よく「リーマン面」というものがでてきますが，これも関連があるのでしょうか？

答．同じものです．関連があります．一般に，n 次元多様体にリーマン計量を付与したものを，**リーマン多様体**とよび，それに関する幾何学をリーマン幾何学と言います．現在も発展を続けている分野です．**リーマン面**は，曲面の上に複素構造を付与したものです．したがって，リーマン計量を付与したものと，構造が異なりますが，たとえば，**等温座標系**という概念を通して，曲面のリーマン幾何とリーマン面は密接に関係します．教科書 p. 96, p.155 を参照ください．

問．単位円板のポアンカレ計量では，境界に近づくと，長めに計られてしまう，とのことですが，何が長めに計られるのですか？

答．計られるのは曲線や接ベクトルです．

問．$d(a\theta) = da \wedge \theta + ad\theta$ のあたりがわかりません．$da\theta + ad\theta$ や $da \wedge \theta + a \wedge d\theta$ ではいけないのでしょうか？

答．外微分の性質 (教科書 p.75) を参照ください．

問．imbedding と embedding の違いについてわかりません．

答．違いはありません．同じ意味です．

問．ガウス曲率や平均曲率がまだわかりません．

答．曲面の性質なので，曲線の場合よりわかりずらいかも知れませんね．もう一度，教科書 pp.54–56 を熟読することを薦めます．

問．第１基本形式は曲がり具合の情報，第２基本形式はねじれ具合の情報かと思います．ということは，ガウス曲率には空間のねじれに関する情報はまったく入らないということですか？

答. これは，質問の補足説明にあった文章ですが，前提も違うし，結論も違います．以前書いたように，たとえるとしたら，第１基本形式は伸び縮み具合の情報，第２基本形式は凸凹具合の情報です．ガウス曲率は，曲面自体の伸び縮みの情報，つまり，(空間の計量から誘導される) リーマン計量だけで定まるというのが適切かと思います．

問. $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ 老師の $\mathbf{R}^3$ 星での姿は何でしょう？また，外積組合副理事 $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ の $\mathbf{R}^3$ 星での姿は何でしょう？

答. 解答書 No.6 の解答での質問です．$\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1$, $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ が答です．皆さんわかりましたか？

問.「計算数学」は「計算機数学」のことだと思います．高度な情報科学のように見えます．

答. 教えてくれた皆さんありがとう．比較的計算機を多く使う数学という程度の意味ということで納得しました．

問. 数学は総合科学とのことですが，まさしくその通りだと思います．最近，経済学 (とくに金融) での応用もさかんですが，経済分野での，本や研究分野，北大の先生などを紹介してください．

答. 数理経済学は，高度な数学を使う分野なので，数学を専攻した人が，研究する場合も多いようです．でも，詳しいことは知りません．北大の先生も思いつきません．ところで，北大の経済学部の入試は文系の数学を課していますね．私立大学の経済学部では，入試に数学のないところもあるそうです．それで，デリヴァティヴなどの高度な金融概念を完全に理解できるようになるんでしょうかね．心配です．質問と直接は関係ないのですが，最近読んだ本で，森島通夫著，智にはたらけば角が立つ，朝日新聞社，1800 円，は，世界的な数理経済学者，森島先生の自伝ですが，業界の暴露本でもあります．学者にも，どろどろした世界があるんですね．なかなかおもしろかったですが，私 (石川) は，そういうことには，あまりかかわりたくないですね．でも巻き込まれたりして．

問. 数学科の先生達は，どうして字が下手なんですか？石川先生は，マシなほうですが，ほとんどの先生が，めちゃくちゃ下手です．数学が総合科学 (芸術) と言うなら，字をきちんと書くことも芸術に入れてください．

答. マシで悪かったね．ところで，書道は芸術と思いますが，書道の草書は，素人が見たらめちゃくちゃ字が下手に見えるかもしれませんね．ですから，芸術うんぬんは筋ちがいかなと思います．でも，字をきちんと書くことは確かに大切ですね．お互いにこころがけようね．それとは別に，字がへたでも (上手なほうがもちろん良いけれど)，内容をよく準備して，誠意をもって講義する先生を，私 (石川) なら尊敬するけどね．

問. 質問箱のようなものを作って，学生が自分で勉強していて気になったことを，いろいろ講義をうける中で気になったことを自由に質問して，先生が答えるというようなシステムがあったらおもしろいと思います．

答. なかなか良いアイディアとは思いますが，でも，そうすると，現実的に手間が大変ということもあり，また，規模が大きくなると，自分の興味と全く関係ない誰かの質問を，誰かが解答している，ということが多くなって，あまり意義がなくなるとも考えられますね．ですから，１つの講義に関する質問ということで内容を限定して，１人の人間 (いまの場合，それは私 (石川)) が責任をもって答えるのが，やっぱり良いかなと思います．

問. ガウスは遅咲きの人で，計算をよくしているうちに，多くの法則を見つけたと聞いています．他にも体育の先生をしながら，４０か５０才で数学に名を残した人もいると聞きました．一生懸命取り組んでいれば，むくわれるという例でしょうか？

答. そうですね．こういう話を聞くと，元気が出てきますね．継続は力なり，ですか．ところで，一生懸命は一所懸命ともいいますね．１つの事に永く専念するということが大切ということですね．

問. ガウスは天才でしたが，今現在からすれば当たり前のことを多く発見したに過ぎません．ということは，現代の人は皆，ガウスなみに頭がいい (!?) ということはないでしょうか．彼の知的レベル以上のことを考えられるのはすばらしいですね．

答. 同意しかねます．当り前とは全然思いません．なぜ当たり前なのか説明してください．そもそも，ガウスが発見したことをすべて知っているのですか？まあ，それはともかく，先人が苦労して見い出したことをわれわれは，“あと追い”で理解しているだけです．確かに，ガウスが考えたことを知りうるということは，後から生まれたものの特権であり，すばらしいことと思います．先人の努力に感謝して，それをできるだけ発展させて，後世の人々に，その知的遺産を伝えていくことが，われわれ現代人の使命ではないか，と，まあその，考えるわけです．そうして，２０世紀の後半には，こんな当り前のことを研究していたんだ，とか言われたりするわけです．

問. Gauss が Riemann の講演を聞いたとき，８０歳近くの晩年のじいちゃんなのに，Riemann の難しい説明が理解できたということですが，長く数学者をやっていく秘訣ってあるんでしょうか？

答. うーん，何か観点がずれているような気がします．Riemann の発想が，Gauss 以外の数学者には理解できないほど革命的なものであったというエピソードなのだと，私 (石川) は理解しています．それ

とは別に，長く数学者をやるのは難しいですね．数学者とよばれるにふさわしい業績をあげること自体が難しいですから，それを継続していくのはより難しいですね．秘訣は，こっちが知りたいですね．ところで，私 (石川) には，２つの目標があります．７０才までは，数学の現役を続ける，つまり論文を書き続ける，ということと，毎年，本を最低１冊書く，というものです．ささやかな目標ですが，がんばりまーす．

問．また講義のノートをプリントして公開して講義してほしいです．

答．そうしたいところですが，そうすると，プリントをもらったから安心，昼寝でもしようか，という人が，必ず現われます．ですから，あまり公開したくないんです．できるだけ予習して，板書は，キーポイントだけノートする，どこがキーポイントか，講義を聞きながら自分で判断する，というのが理想的なんですが．

問．証明というものは大事なものなんですか？ガウスの定理の証明を聞いて全然わからなかったので，そう思ってしまいました．証明がなくても結果さえ知ってしまえば十分なような気がします．数学の講義は，定理とその証明という繰り返しが多くて退屈です．

答．証明は大事なものです．まず，自分がわからないから要らない，というのはあまりに短絡的かと思います．でも，世の中そんな意見が大勢なんですよね．世の中，右も左も真っ暗闇ですね．それはともかく，そもそも，定理が本当に正しいということを，証明がないのにどうやって判断するのでしょうか？専門家が正しいと言っているから信用するんでしょうか？それとも，偉い人，金持ち，教祖さん，西欧人などが，そう言ったから，それをそのまま，何も考えずに認めてしまうんでしょうか？自分で何も判断しようとしない風潮があるから，あやしげな宗教団体が横行し，詐欺まがいの商売が繁盛し，外圧そのままに日本の国があらぬ方向へ向かってしまっているのかも知れませんね．それはとにかく，**証明の下には，万人みな平等**ということが，数学の良いところなんです．合衆国大統領が，この定理は正しいと宣言しても，証明しなければ，誰も認めないんです．正しくないものは正しくないんです．証明を否定すると，おおげさに言うと，数学に，それ以外の，権力，金力，門閥，情実，恫喝などなどの魑魅魍魎 (ちみもうりょう) を介入させるということになりかねません．非常に危険だと思います．それにも増して証明が大事なのは，証明を考えることで，**定理の背後にある数学的構造が見えてくる**，という点にあります．ぜひ，定理を勉強するときは，その証明はどうなっているんだろう，と考えてみてください．もちろん，講義ですべての定理の証明をすべきかどうかは，また違う問題です．たとえば，私 (石川) の講義では，ほとんど証明は省略して，定理の意味あいや，具体例などに重点をおいて説明しています．ところで，ガウスの定理は，講義では証明していませんよ．その前段階を説明したに過ぎません．それはともかく，そのような講義を聞いた後で，その定理の証明を知りたくなる，考えてみたくなる，というのが，本当ではないか，と思います．それから，講義が退屈だとしたら，(気持ちはわからないでもないけれど)，皆さんが予習を怠っているからかなと推測します．そうでなければ良いですね．

問．講義ではパラメーター変換 $U = U(u, v), V = V(u, v)$ があって，第１基本形式が $I = dU^2 + dV^2$ のとき，平坦であるといい，教科書ではガウス曲率 $K \equiv 0$ のとき平坦といっていますが，これは同じ意味ですか？(再掲)

答．No.6 の解答のつづきです．教科書 pp. 91–92 の内容を仮定します．さて，ガウス曲率 $K \equiv 0$ なら，第２構造式から，$d\omega_2^1 = 0$ となるので，ポアンカレのレンマから，(考えている点の単連結な近傍で) ある関数 φ があって，$d\varphi = \omega_2^1$ となりますね．このとき，$d(\cos\varphi) = -(\sin\varphi)\omega_2^1, d(\sin\varphi) = (\cos\varphi)\omega_2^1$ になることに注意して，１次微分形式 $\bar\theta^1 = (\cos\varphi)\theta^1 + (\sin\varphi)\theta^2$ と，$\bar\theta^2 = (-\sin\varphi)\theta^1 + (\cos\varphi)\theta^2$ に注目します．すると，$\bar\theta^1\bar\theta^1 + \bar\theta^2\bar\theta^2 = \theta^1\theta^1 + \theta^2\theta^2 = I$ ということと，$d\bar\theta^1 = 0, d\bar\theta^2 = 0$ が，計算によって (外微分の性質と，第１構造式を用いて) わかります．(自力で $d\bar\theta^1 = 0, d\bar\theta^2 = 0$ を検算してみてください．それを質問書に書いたら例外として点数を加算します．) そこで，ポアンカレのレンマに再び登場してもらうと，関数 $U = U(u, v), V = V(u, v)$ があって，$\bar\theta^1 = dU, \bar\theta^2 = dV$ となることがわかります．逆関数定理から，U, V は実際，座標系となり，しかもこのとき，$I = dUdU + dVdV$ となり，講義の意味で平坦な曲面になります．**QED**．(この問題に関し，同僚の Y 先生から，文献 M. Spivak, Comprehensive Introduction to Differential Geometry, volume 2, Publish or Perish, 1970. を教えてもらいました．この本には，平坦性と，曲率テンソルが消えること (曲面の場合 $d\omega_2^1 = 0$ に対応) が，同値であるという定理が，一般次元の場合に，多面的に懇切丁寧に証明されています．上で紹介したものは，その１つの証明を，教科書 (小林昭七著，曲線と曲面の微分幾何) の内容にあわせてアレンジしたものです．ここでの隠れたキーワードは，(SO(2) の) **モーレー・カルタン形式**です．)

問．補足説明が１５０字以上でないと点数はつかないのですか？

答．基本的にはそうです．１５０字以上というのはあくまで目安ではありますが，とにかく，説明不足というのが一番いけない．説明は，俳句じゃないから，長いほどよい，詳しいほどよい，わかりやすいほどよい，ということです．それに，説明が書けるかどうかで，皆さんの理解の度合がわかるんです．

問．レポートは返却してくれますか？

答．希望者には返却する予定です．ただし，採点がまだ終了していないので，待っていてください．