幾何学１質問の解答　担当教官 石川 剛郎

No. 6（１９９９年６月９日）の分

問． 曲面が平坦であるというのはどういう意味ですか？円柱がなぜ平坦なのですか？丸いと思うのですが．円錐や三角錘やトーラスなどは平坦ですか？メビウスの帯は平坦ですか？

答．平坦であるという言葉は，ここでは曲面の内在的 (intrinsic) な性質を表すのに使用しています．つまり，第１基本形式に関する性質です．第１基本形式が，(曲面のパラメーター空間のある座標 $U = U(u,v), V = V(u,v)$ に関し) $I = dUdU + dVdV$ と表される場合，平面と全く区別がつかないので，平坦であると言います．この条件は，言い換えると，その曲面から平面への (局所的に，行きも帰りも C^∞ 級な１対１) 対応であって，それが**等長変換** (長さを保つ変換) であるようなものが存在するということです．このことを，講義では,「おむすびの海苔」でたとえ話をしました．円柱について言えば，確かに空間への入りかたとしては，丸く曲がっているのですが，その上の曲線の長さなどを調べる限りは，(切り開けば) 平らに広げられるので，平面上で考えるのとまったく同じことなります.「のりまき」には海苔がうまくまけるのです．そういう意味あいで，平坦であるという言葉を使っているわけです．また，円錐について言うと，円錐の頂点は特異点であり滑らかな曲面ではないので除外しますが，頂点以外では平坦です．クリスマスには，紙を丸めて帽子を作り，クラッカーを鳴らし，手巻ずしを食べますね．(食べないかな．) それは円錐が平坦だからできるのです．三角錘は，頂点や稜 (りょう，つまり辺) は滑らかでないので除外しますが，それ以外は平面から構成されているので，やはり平坦です．最近のコンビニのおむすびは平坦ですね．(稜のところも，紙 (海苔) を折れば巻けるので平坦であるとも言えますが，この講義の対象 (なめらかな曲面) から逸脱してしまい，説明不足で誤解をまねくといけないので，考えないことにしましょう．) メビウスの帯は，紙を伸び縮みさせずに作れるので，やはり平坦です．(焼海苔だと少々きびしいか．) 空間内のトーラスは平坦ではありません．(のりまきでトーラスを作ると，しわがよります，破れます．) 平坦な曲面の例は，他に，空間曲線の接線のなす可展面 (tangent developable) があります．教科書 p.61 問 2.6 も参照してください．可展面は，自動車などのボディーのデザインに応用されるそうです．板金を伸び縮みさせると，厚みが不均一になって良くないからですかね．

問． 講義ではパラメーター変換 $U = U(u,v), V = V(u,v)$ があって，第１基本形式が $I = dU^2 + dV^2$ のとき，平坦であるといい，教科書ではガウス曲率 $K \equiv 0$ のとき平坦といっていますが，これは同じ意味ですか？

答． 良い質問ですね．よく勉強しているからできる質問ですね．同じ意味です．講義ではまだ進んでいないですが，教科書 pp. 91-92 の内容を仮定すると，第１基本形式が $I = dU^2 + dV^2$ と表される場合は，接続形式の成分 $\omega_2^1 = 0$ となって，$K \equiv 0$ となります．したがって，教科書の意味で，平坦になります．ですから，混乱は生じないと思います．実は，逆も成り立つ，つまり，$K \equiv 0$ ならば，パラメーター変換 $U = U(u,v), V = V(u,v)$ があって，$I = dU^2 + dV^2$ となることが知られているのですが，簡潔な説明が思いつかないし，適当な文献も現在見つからなかったので，困っています．良く知られたことでも，文献に明確には記されていないということも多いのですね．少し待っていてください．(ところで，dU^2 は $dUdU$ の意味なので，$dU^2 = 2dU$ とは考えないでください．こんなことを書くと，逆に混乱するかな．)

問． 微分形式の外積と空間ベクトルの外積の関係を説明してください．空間ベクトルについて，$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ なのですか？

答． ある意味ではそうです．どういう意味か，説明してみましょう．微分形式の外積は，実は，(３次元とは限らない)「ベクトルの外積」という考え方に基づいて定義されています．ここでのキーワードは，**外積代数** (**グラスマン代数**) です．外積代数については，本来，線形代数の続論として必ず勉強すべき内容なのですが，時間の関係で，詳しく扱われていないかも知れません．残念です．そこで，たとえ話が多くて恐縮なんですが，この場を借りて説明してみましょう．さて，(あるベクトル空間 V の) ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$ に対し，外積というもの，$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ や $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ や $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ などといったものを考えるんですが，ところが，これらは，もともとの空間 V の住人ではない，というのが厄介なところです．つまり外積は宇宙人です．彼等が，バルタン星人なのか，ウルトラの星から来ているのかは，今は申しません．とにかく，V 星人ではないんです．しかし，$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$ は，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が１次従属であることを意味する，$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 0$ は，$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が１次従属であることを意味する，という具合に，非常に役にたつ正義の味方なのです．ところがですね，一部の心無い人達が，あいつらは何者なんだ，よくわからない奴だ，よそものだ，と，外積たちを差別して，いじめ始めたのです．そんな中，$V = \mathbf{R}^3$ 星では，この事態をなんとか収拾しなければ，という動きが起こりました．そこには，幸いに，勇者，標準基底３兄弟 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ が居たので，彼等に解決をゆだねました．３兄弟は，外積君たちに，仮の姿に変身して，$\mathbf{R}^3$ の住人になってもらおうと考え，外積組合の代表である $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ 老師に相談しました．相談の結果，どういう処置をしたかと言うと，$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ 君については，調べてみると，$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{u} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u}) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ という関係式があり，$\mathbf{R}^3$ の各住人 $\mathbf{u}$ に対して，スカラー $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u})$ を贈ったという功績が認められました．(賄賂

ですね．) 一方，$\mathbf{R}^3$ に住んでいるベクトル $\mathbf{x}$ さんも，やはり，$\mathbf{R}^3$ の各住人 $\mathbf{u}$ に対して，スカラー $\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}$ を配っていたのです．($\cdot$ は内積です．) これは何か因縁があるのではないか．そこで，どんな $\mathbf{R}^3$ 星人 $\mathbf{u}$ に対しても，$\mathbf{x}\cdot\mathbf{u} = \det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{u})$ となるような $\mathbf{R}^3$ のベクトル $\mathbf{x}$ さん (ただ１人存在することがわかります) を呼んできて，実はあなたは，$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ 君の生まれ変わりなんですよ，と言いました．このように，$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ 君と因縁の深い $\mathbf{x}$ さんの名前が，恐ろしいことに $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ だったのです．そういう意味で，$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ と同じということになります．また，$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}$ 君については，$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c} = \det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3$ なので，ここは，ひとつ，スカラー $\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ そのものに変身してもらおうということになりました．では，質問です．$\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3$ 老師の $\mathbf{R}^3$ 星での姿は何でしょう？また，外積組合副理事 $\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2$ の $\mathbf{R}^3$ 星での姿は何でしょう？

問． 外積に出てくる $\wedge$ は何ですか？

答． 外積は通常の積とは違うので，区別するために特殊な記号を使っています．ウェッジです．くさびです．記号の由来は知りません．そういえば論理記号としても使いますね．その場合，$\vee$ も登場しますが，(外) 微分形式関連では $\wedge$ だけが出てきます．

問． 外積 $du\wedge dv$ と対称積 (?) $dudv$ の違いは何でしょうか？

答． $du\wedge dv = -dv\wedge du$ と $dudv = dvdu$ の違いがあります．

問． 教科書で，$\psi = fdu\wedge dv$ について，外微分 $d\psi$ を，$d\psi = df\wedge du\wedge dv$ で定義するとありますが，この式は，$(df\wedge du)\wedge dv$ なのですか？それとも $df\wedge(du\wedge dv)$ で定義するのですか？また，$du\wedge du\wedge dv$ などはどう定義するのですか？

答． 自然であり鋭く，良い質問だと思います．外積についても，結合法則が成り立つことを前提にしています．したがって，どちらで考えても同じです．$du\wedge du\wedge dv = 0$ もそう定義するということです．

問． 一般的な外微分の定義はありますか？

答． あります．微分形式の具体的な表示によらない定義もありますが，いろいろ準備をしなければ述べられないので，ここでは説明することを断念します．詳しくは，多様体の入門書を読んでください．

問． 外微分形式や，その外微分は，何のために考えるのですか？

答． **グリーンの公式**というのをご存じですか?積分のところで習っているのではないかと思いますが，平面有界領域 D のなめらかな境界上の線積分 $\int_{\partial D} fdu+gdv$ は，その領域上での重積分 $\int\int_D(-f_v+g_u)du\wedge dv$ に等しいという定理です．(このとき,「向きづけ」に注意する必要があります．) 講義で定義した外微分を使うと，$\int_{\partial D} fdu+gdv = \int\int_D d(fdu+gdv)$ となりますね．高次元でも，類似のことが成立します．つまり，領域の境界上の積分が，その領域上での外微分の積分に等しいというものです．**ストークスの定理**とよばれる重要で美しい定理です．私 (石川) は，この定理の存在だけで，外微分形式や外微分を考える価値が十分あるのではないかと思います．ともかく，外微分形式とその外微分を，これからの講義では，曲面論に応用していきます．乞ご期待．

問． 外微分といいますけど，これに対して，内微分なんてのはありますか？

答． ない．

問． n 次微分形式というのは存在するのでしょうか？

答． 存在します．詳しくは，多様体の本を読んでください．また，後期の幾何学３の講義でも触れられるかと思います．

問． du は単なる記号であるということですが，やはり何か意味があると思うのですが，それは何ですか？

答． そんなに知りたいなら教えよう，ワトソン君．ここでのキーワードは**方向微分**です．いま，u を (u,v) 平面の関数とみなします．一方，(u,v) 平面上に曲線 $u=u(t), v=v(t)$ を描いてみましょう．その曲線方向についての関数 u の方向微分は，$\dfrac{du}{dt}$ となります．関数 $f=f(u,v)$ の曲線に沿った方向微分は，合成関数の偏微分の公式から，$f_u\dfrac{du}{dt}+f_v\dfrac{dv}{dt}$ となります．これは，丁度，df を dt で "割った"形になっていますね．使うと誤解をまねくので，あまり使わない表記法かも知れませんが，$\dfrac{df}{dt}$ で方向微分を表すことも可能です．(普通は，f が１変数の場合しか使わない表記法ですが．力学の教科書などでは良く見かけます．) du や dv は，こんなところから編み出された，便利な記号です．

問． du や dv は微小という意味なんでしょうか？

答． 単独ではそういう意味はないと考えてください．でも，$\dfrac{du}{dt}$ は微分であり，t が微小だけ動いたとき，u がどのぐらい動くか，その比の極限ですから，そういう意味では微小ということと関係して来るかなとは思います．

問． 外微分を２回続けると 0 になること，($ddf=0$ や $dd\varphi=0$) は，計算ではわかりますが，それとは別に図形のイメージで説明できますか？

答．基本的には $f_{uv}=f_{vu}$ ということが効いているので，そのことを，図形的に説明するのは，至難の業のように思います．ゆっくり考えれば，できそうな気もしますが，私 (石川) はまだまだ修行不足で，すぐには思い付きませんでした．

問．ポアンカレのレンマで，単連結領域 D 上の１次微分形式 φ について $d\varphi=0$ ならば，$\varphi=dh$ と表されるとのことですが，関数 h はどうやって探せますか？

答．講義では時間の都合で，証明をカットしてしまいましたが，教科書 p.77 を読むとわかるかなと思います．ひとことで言うと，積分によって，関数 h を作り出します．

問．ポアンカレのレンマとポテンシャル関数の存在は，何か関係がありますか？

答．良いところに気がつきましたね．立派です．実は同じ数学的内容を，別な表現で述べたに過ぎません．でも，微分形式による記述の方が，より根源的であり，私 (石川) は微分形式を使った方を好みます．それはともかく，いわゆるベクトル解析と，微分形式に関する結果には多くの共通点があります．引き続き，このような質問の視点から，類似点を見つけていくことを薦めます．

問．単連結という概念が，いまいちわかりません．

答．単連結という概念は，幾何学２で習っていることと思います．ここでは，数学的厳密性を少し犠牲にして説明すると，対象としている図形のなかに閉じた道を描いたとき，それが，連続的に，道を切ることなく，その図形の範囲内で，１点に変形できる場合，それが，どんな道であろうと可能な場合，その図形は単連結であると言います．たとえば，CD (compact disk) は，まんなかに穴があるので，単連結ではありません．穴をふさげば単連結です．単連結は，英語では simply connected といいます．ところで，古い函数論の書物などでは，(“単に”) 連結な領域を単連結と呼んでいたりすることもあるので，少し注意が必要です．

問．$f_{uv}=f_{vu}$ がなんとなく納得いかないのですが．

答．微積分の教科書に証明が書いてあります．それを探して，読んでみてください．それでもわからなかったら，その時点で，改めて質問して，**どこがどうしてわからないのか**詳しく補足説明してください．

問．微分形式は，比をとる，積分するといった操作によって，特徴をつかんだりするものですか？微分形式単独では，どうあつかってよいかわからなくなります．定量的扱いはできますか？

答．なるほど，気持ちは良くわかります．特に，積分によって微分形式を理解しようというのは，的を射た (まとをいた) 考え方だと思います．たとえば，線積分 $\int adu+bdv$ などでは，“微分形式” $adu+bdv$ が (知らないうちに) すでに登場して，お馴染みですね．また，方向微分との関係は，他の質問の解答で触れました．ともかく，詳しいことは，今後の講義を通して答えられるかな，と思います．

問．偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ の ∂ は何と読むのですか？

答．詳しい事はわかりませんが,「ラウンド・ディー」と読んでいます.「デル」と読む人もいますね．

問．$\det(B)$ は線形代数でやったのですが，$\mathrm{tr}(B)$ は何なのかわかりません．

答．トレース (trace) です．正方行列の対角成分の総和です．ドイツ語では，シュプールといったように記憶しています．スキーの斜滑降で，シュプール (トレース) を描きながら滑り降りると気持ち良いでしょうね．そういえば，最近スキーに行っていないな．理由は，おっくうで，しかもヘタクソで不格好だからですが，最近のスノーボードの流行で，スキー場に行く気がしない，というのも理由ですね．

問．ポアンカレって，何系の人なんですか？計算数学系でもよく聞く名前だし，ローなんとかって人も幾何系の人だけど計算数学系ででてきたし，けっこう，つながりあるんですか？それから，ポアンカレって，いつぐらいの人なんですか？

答．推測するに，ローレンツ・アトラクターで有名なローレンツのことですか？そのローレンツは，気象学者だったと記憶しています．ローレンツ幾何のローレンツとは別人です．ポアンカレは，1854 年生まれで 1912 年に亡くなっていますね．ポアンカレはいろいろな分野で活躍した，偉大な数学者です．私 (石川) の尊敬する数学者の一人です．ポアンカレの啓蒙書である「科学と方法」(岩波文庫にあります) は愛読書です．ポアンカレは位相幾何という分野の創始者であると言えます．皆さんは,「ポアンカレの予想」というのを聞いたことがありますか？それから，力学系では，ホモクリニックポイントの発見など，カオス理論の先駆的仕事を多く残しましたね．彼の名著「天体力学における数学的方法」は，汲めども尽きぬアイディアの源です．(と私 (石川) の敬愛するアーノルド先生が言っていました．) また，彼は保型関数の研究でも有名ですね．ところで，質問と直接は関係ないですが．私 (石川) は，数学を何々系などと，政党の派閥のように (ポケモンのように？) 分類するのは嫌いです．数学は，個別科学ではなく，総合科学 (芸術) だからです．自分の専門分野しか知らず視野が狭いということは，数学では致命的です．偉大な数学者は，縄張りのようなものにはこだわりません．(私 (石川) が偉大であるという意味ではありませんが．) 強いて言えば，ポアンカレは，総合系あるいは万能系でしょうか．(そんなこと，ほっとけー．すみません，つまらないシャレです．本人もわかっているんですが，書かずにはいられませんでした．) それはともかく，それに比べ，普通の学者は，私 (石川) も含めて，縄張りのような小さ

なことに，どうしてもこだわるようです．自分の実力に自信がないからかな？そんなことはないですよね．それから，またまた質問と関係なくて恐縮なのですが,「計算数学」というのが，どういうものかわかりません.「計算しない数学」は，まあ，ないだろうし．計算自体の数学的構造を研究する，ということでしょうか？もっと実質的なネーミングでないと，頭の固い私 (石川) には理解できません．(これに関し，皆さんからの，なんらかのコメントを期待しています．)

問．“定理” と “命題” と “補題” の違いは何ですか？かなり前から気になっています．重要な結果でも，何々の補題とよばれたりしますね．Zorn の補題や Poincaré の補題など．

答．私 (石川) も気になっています．良くわかりませんが，通常，ある程度，最終目標であるような重要な結果を定理，定理とよぶには少し弱い結果を命題，と使い分け，補題は，それらの結果を導くための補助的な結果，という意味あいで使うことが多いようです．しかし，元来は補助的な結果であっても，それ自体が，もともとの用途以外でも役に立つことがある，ということは，容易に想像できますね．だからあまり役に立たないかもしれない，といった結果でも，やはり公表しておくべきですね．ところで,「中山の補題」というのもあります．知っていますか？質問とはまったく関係ないのですが，日本人の名前のついた定理を見ると，つい，うれしくなります．とくに海外の国際シンポジウムなどではそんな心境になります．私 (石川) は国粋主義者ではなく，“コスモポリタン” を自任しているつもりなのですが，外国 (特に西欧) にいると，なぜかアイデンティティーを日本 (国，人?) に求めたくなりがちです．心細いからでしょうかね．普段は，国家など，派閥と一緒で否定しているのですが... これが人間の弱さなのでしょうか．まあ，いいけど．

問．数学の勉強はやはり練習問題を解いて，知識を定着させていくものだと思いますが，教科書などの問は，略解しかのっていないので，解けないことが多いのですが，どうして，著者はこんな書き方をするのでしょうか？

答．数学には，自分で問題を解く楽しみ (生みの苦しみ?) があります．解けたときのうれしさは，なかなかのものです．快感と呼んでも良いくらいです．詳しい解答がついていないのは，そんな楽しみを奪いたくない，という親心かなと思います．

問．今日の分はすべてわかりました．質問がないので，問題を解きます．

答．と，教科書の問題を質問書に自力で解いてくれました．それは結構なことで喜ばしい限りですが，評価方法を公表しているように，質問でないと評価しようがなく 0 点になります．ですから，問題の解答は，自分のノートに書くことを薦めます．どんどん解いて，どんどん実力をつけてください．でも，質問書には，質問を書いてください．わかっているのに質問を書かないなんて，もったいない話です．わかったその先を，少しでも考えれば，程度の高い質問になるはずだから，高得点も期待できるというのに．というより，わかったその先には，おもしろい世界が広がっているかも知れないのに，知ろうとしないなんて，ああ，もったいない．もったいない．そもそも，学問の世界では，すべてがわかった，なんていうことは，あり得ないんです．**世の中わからないことだらけ**なんだからね．質問がない，ということは，**知的好奇心の欠如**とみなされてしまうかも知れませんよ．そもそも，**学問とは，学んで問うもの**です．学んで問われるだけのものでは，本来ないはずです．(実体は，学ばされて問わされていたりして．) ともかく，少し勇気を持って，未知なる世界に一歩，足を踏み出そうぜ．

問．学祭ボケがなおりません．まつり最高．

答．楽しくてよかったね．よさこいソーランもありましたね．北海道神宮のお祭りもありました．でも，勉学はおろそかにしないでください．祭のあとで「あとの祭」にならないようにね．