幾何学１質問の解答　担当教官 石川 剛郎

No. 5 (１９９９年5月１９日) の分

問. 空間曲面の主曲率の意味を教えてください．曲面の主曲率とは，曲面上の特別な曲線の法曲率とのことですが，それはどの曲線をさしているのですか？

答. 曲面の曲がり具合を調べるには，皆さんならどうするでしょうか？触ってみる．撫でてみる．なるほど．でも，曲面のような２次元的なものの曲がり具合を，具体的な数値が得られるように，詳しく調べるとしたらどうしますか？曲面を切ってみて，その切り口の曲線の曲率を調べる．なるほど．そうです，曲面を曲線に沿って切り開くことを思い浮かべてください．でも，一度切り開くともとに戻せないから，そうですね，糸を曲面に沿ってはわせることを思い浮かべてください．その際，曲線をいろいろ取り直して，そのデータを総合して，曲線の曲がり具合を判定した方が良いですね．たとえば平面上には，直線がいろいろな方向にひけますが，それとは別にいくらでも曲がった曲線を描くこともできます．そこで，曲面の曲がり具合をみるには，そのようなあまたある曲線の中で，曲面に付随して特徴的な曲線に注目しなければならない，ということは一般論として理解してもらえるかなと思います．さて，そのたくさんある曲線の法曲率を調べます．ここで法曲率とは，曲面上の曲線の位置ベクトルの (弧長パラメーターに関する) ２階微分，そのうち，曲面に接する部分は，曲面の曲がり具合とは関係しないから，その法線方向の成分，それが指定されている単位法ベクトル $\mathbf{e}$ の何倍になっているかを計ったものです.「特別な」というのは，与えられた曲面上にのっている曲線のうちで，その法曲率を最大または最小にする曲線であるという意味です．そして，その最大値と最小値を主曲率とよび，κ_1, κ_2 と表しました．実は「特別な」曲線は，その速度ベクトルのみが問題となるので，その方向をふくむ平面と曲面の交線として実現されます．ともかく，数学では，極端な状態に注目します．それが，対象の性質を顕著に表していることがままあるからです.

問. 曲面の主曲率 κ_1, κ_2 は別々に考えないのでしょうか？ガウス曲率 $K = \kappa_1\kappa_2$ と平均曲率 $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ だけで考えるのでしょうか？

答. 別々に考えるときもありますが，ガウス曲率と平均曲率だけを考えれば十分なことが多いようです．まあ目的によりますね.

問. 主曲率は必ず２つありますか？１つのときはありますか？

答. 良いところに気がつきましたね．１つのとき，つまり $\kappa_1 = \kappa_2$ のときもあります．そのような曲面上の点を臍点 (せいてん，umbilic) とよびます．曲面の “へそ” ですね．教科書 p.57 を見てください.

問. 法曲率は曲率なんですか？

答. 曲面にのっている曲線としての曲率と言えますが，(以前定義した) 空間曲線としての曲率とは異なります．曲面の曲率を定義するための補助的な量 (この場合，曲線上の関数) といえばよいかと思います.

問. 法曲率は曲線に対して一意的に定まらないのですか？

答. 定まりません．その曲線をふくむ曲面を１つ定めてはじめて法曲率が決まります．というのは，法曲率は $\kappa_n = \mathbf{p}'' \cdot \mathbf{e} = -\mathbf{p}' \cdot \mathbf{e}'$ ですから，$\mathbf{e}$ に依存しますね．ところが，$\mathbf{e}$ は曲面の単位法ベクトルですね．これは曲面に依存しますね．曲線だけでは決まりません.

問. いくつも “曲率” と名前のついたものがたくさん出てきましたが，それらの違いや，具体的な利用の仕方を教えてください.

答. **平面曲線の曲率**は，平面曲線の曲がり具合を調べるのに利用します．**空間曲線の曲率**は，空間曲線の曲がり具合を調べるのに利用します．**空間曲面上の曲線の法曲率**は，曲面の主曲率を定義するのに使いました．**空間曲面の主曲率**は，曲面が極端に曲がっている方向にどれだけ曲がっているか計るために利用します．実際は，その組み合わせである，**ガウス曲率**や**平均曲率**を利用することが多いようです．その具体的応用については今後説明すると思います.

問. ガウス曲率や平均曲率は空間曲面を決定してしまうのでしょうか？

答. そうです．平行移動や回転移動を除いて曲面を定めます．そのことを厳密に説明するには準備が必要なので，少し待っていてください.

問. 主曲率やガウス曲率は関数ではないのですか？

答. 関数です．曲面上の関数です．曲面の点に依存して値が変わります.

問. 曲面のゆがみ，平面からのずれなどを基本形式やいろいろな曲率から見分ける方法はありますか？

答. 主曲率，あるいは，ガウス曲率と平均曲率からわかります．たとえば，ガウス曲率と平均曲率が両方 0 なら，第２基本形式が消える ($L = M = N = 0$) ということがわかります．(教科書 pp. 71-72 参照．) したがって，教科書 p. 61 の問 2.5 から，そのとき，その曲面は平面 (の一部) となります.

問. 空間曲面の第１基本形式 I や第２基本形式 II に空間ベクトル ($\mathbf{p}'$ など) を代入するという意味がわかりません．$I(\mathbf{p}', \mathbf{p}'), II(\mathbf{p}', \mathbf{p}')$ とは何ですか？なんだかさっぱり分かりません.

答. 空間曲面の (u,v) 平面によるパラメーター付けがあると，平面曲線と空間曲線の対応がつきますね．その速度ベクトルを考えると，平面のベクトルと空間ベクトルの対応がつきますね．たとえば，平面曲線 $(u(s),v(s))$ の (弧長パラメーターに関する) 速度ベクトル (u',v') と，空間曲線 $\mathbf{p}(s)=\mathbf{p}(u(s),v(s))$ の速度ベクトル $\mathbf{p}'=u'\mathbf{p}_u+v'\mathbf{p}_v$ は同一視しても混乱しないですね．(混乱しますか？) そういう意味で，曲面の接ベクトル $\mathbf{p}'$ をベクトル (u',v') と見なして，

$$I(\mathbf{p}',\mathbf{p}')=(u',v')\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

という２次形式の値として定義するわけです．同様に，

$$II(\mathbf{p}',\mathbf{p}')=(u',v')\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

と定義します．

問. 第２基本形式は，変数のとり方で変わりますか？また，空間曲面を平行移動や回転移動したとき，第２基本形式は変わりますか？

答. ある意味で “不変式”になっています．つまり，別のパラメーター付け $\mathbf{p}(u',v')$ に対して第２基本形式が，$L'(u',v')du'du'+2M'(u',v')du'dv'+N'(u',v')dv'dv'$ と計算されたとします．(この場合，プライム $'$ は微分ではなく単に区別のために使っています．) このとき，$du'=u'_u du+u'_v dv, dv'=v'_u du+v'_v dv$ を代入した式は，もともとの，$Ldudu+2Mdudv+Ndvdv$ と一致します．このことは，第１基本形式にもあてはまります．

問. $\lambda=\dfrac{II(\mathbf{w},\mathbf{w})}{I(\mathbf{w},\mathbf{w})}$ の最大値，最小値は結局どうなったのですか？

答. 法曲率は，$I(\mathbf{w},\mathbf{w})=1$ であるような接ベクトル $\mathbf{w}$ について $II(\mathbf{w},\mathbf{w})$ の値になることに注目し，その最大値，最小値をもとめるのがそもそもの目的でした．しかし，その代わりに，接ベクトル $\mathbf{w}$ を零ベクトルにならない範囲で動かして，上の λ の最大値，最小値を求めればよいことに気付きました．($\mathbf{w}$ をスカラー倍しても，λ は変化しません．) そのような最大値，最小値を求めるために，ラグランジュの未定乗数法を使って，とりあえず極値を求めました．その結果，その極値はある２次方程式の解であることがわかりました．したがって，極値は (多くても) ２つの値 κ_1,κ_2 しか取りえないことがわかりました．ところが，最大値，最小値は必ず極値となるので，結局，それらが実は最大値，最小値である，という論法です．(こういうのを何論法というのでしょうか？)

問. ラグランジュの未定乗数法とは何ですか？

答. 条件付き極値問題を解くときの常套手段です．微積分の教科書の最後の方に書いてあると思います．われわれの場合は，$I(\mathbf{w},\mathbf{w})$ が一定 $(=1)$ という条件のもとでの $II(\mathbf{w},\mathbf{w})$ の極値を求めようとしたと言えると思います．

問. 接空間とは曲面の場合，接平面のことと考えてよいのですね．

答. そうです．

問. $\mathbf{p}''$ が曲面に接するとは限らないということがわかりません．$\mathbf{p}''$ のように２階微分は視覚的にどのような意味をなすのですか？

答. 視覚的ではないですが，遠心力を思い浮かべてください．それは曲線からはずれる方向に働きますね．ジェットコースターに乗るときシートベルトをするのはそのためです．

問. $\mathbf{R}^3=\langle\mathbf{p}_u,\mathbf{p}_v\rangle\oplus\langle\mathbf{e}\rangle$ の意味がわかりません．直和分解って何ですか？聞いたことがありません．

答. 関係ないですが，ちくわ分解ではないです．線形代数の教科書には**直和**について必ず書いてあるので，忘れたら復習しておいてください．今の場合，$\mathbf{p}_u,\mathbf{p}_v$ の生成する接平面と，それに垂直な $\mathbf{e}$ の生成する法線は，$\mathbf{R}^3$ のベクトルの**一意的な分解**を与えるという意味です．３次元空間の中に，平面とそれの垂線を思い浮かべてください．思い浮かべましたか？そうしたら，３次元のベクトルを１つ思い浮かべてください．思い浮かべましたか？なんでもよいから思い浮かべてください．なんでもいいじゃわからない？じゃあ，平面は (x,y) 平面として，垂線は z 軸にしましょう．ベクトルは $(1,1,1)$ にとりましょうか．すると，$(1,1,1)=(1,1,0)+(0,0,1)$ と分解できますね．他のベクトルでも同じです．これに関連して,「正射影」という言葉を数学辞典か教科書の索引で調べてください．

問. $\mathbf{p}''=\mathbf{k}_g+\kappa_n\mathbf{e}$ と分解するとのことですが，$\mathbf{k}_g$ とはなんですか？分解は１通りなのですか？

答. 直和分解なので一意的です．ですから，$\mathbf{p}''$ の接平面 $(=\langle\mathbf{p}_u,\mathbf{p}_v\rangle)$ の成分と言えば必然的に１通りに定まります．同様に，$\kappa_n\mathbf{e}$，したがって，κ_n も一意的に決まります．

問. 空間曲面上の曲線の法曲率 (normal curvature) と，それを空間曲線とみたときの曲率の関係は何ですか？空間曲面上の曲線の κ_n (法曲率) と空間曲線としての曲率 κ について，$-\kappa\leq\kappa_n\leq\kappa$ となるのはなぜですか？また，$\kappa_n=\kappa$ や $\kappa_n=-\kappa$ となるのはどのような時ですか？

答． $|\kappa_n|$ は $\mathbf{p}''$ の $\mathbf{e}$ 軸への正射影の長さなので，$\|\mathbf{p}''\| = \kappa$ 以下になります．(ここがわからない人は線形代数の教科書の内積の部分を復習してください．) 等号が成り立つのはいつか？ということを問うのは良い態度です．等号が成り立つのは，$\mathbf{p}''$ が曲面に垂直な場合，言い換えると，$\mathbf{k}_g = \mathbf{0}$ の場合です．曲線に沿ってこの条件が成り立つ場合，その曲線を**測地線**とよびます．測地線は幾何学の主要な研究対象の１つです．物理的な比喩をすると，外力が曲面 (拘束面) に垂直に働いているようなときの質点の動きが測地線ということになります．平面上の測地線は直線です．球面上の測地線は大円 (たとえば赤道) です．

問． 結局，第１基本形式は $I = Edudu + 2Fdudv + Gdvdv$ なんですか，それとも，$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ なんですか？第２基本形式は $II = Ldudu + 2Mdudv + Ndvdv$ なんですか，$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ なんですか，どちらなんですか？

答． 同じ対象をいろいろに表現しているのだと考えてください．つまり，**どちらでもあるのです**．場合によって便利な書き方を使います．

問． $dudu$ を $(du)^2$，$dvdv$ を $(dv)^2$ と書いてはいけないのでしょうか？

答． 書いてもよいです．どんどん書いてください．

問． 球面やトーラスの第２基本形式 $II = Ldudu + 2Mdudv + Ndvdv$ で $M = 0$ となり，双曲面とかもやはり $M = 0$ となるのですが，これは曲面の対称性と関係するのですか？

答． 第１基本形式の $dudv$ 成分 F が 0 になることは，パラメーター $u =$ 一定，$v =$ 一定という縞模様が２つ曲面上にあって，それらが互いに直交していると説明できますが，第２基本形式の $dudv$ 成分が 0 であるというのは何を表しているのでしょうね．皆さんのうちでわかる人があったら質問書に書いてください．もし良い解答ならエクストラの点数を進呈します．

問． 空間曲面の点を，楕円的，放物的，双曲的という３種類に分けましたが，その名前はどこに由来しているのでしょうか？

答． 典型的例が曲面 $z = x^2 + y^2$，$z = x - y^2$，$z = x^2 - y^2$ であるということから来ていると思います．たとえば，曲面 $z = x^2 + y^2$ は $(u, v) \mapsto (u, v, u^2 + v^2)$ とパラメーター付けられるので，楕円的であることはすぐにわかるかと思います．

問． 空間曲面を平面で切った切り口で領域を分けたときの形が，楕円的，放物的，双曲的という分類の由来でしょうか？

答． 良いところに気がつきましたね．その通りです．上の説明も参考にしてください．

問． 曲面のガウス曲率 K の使いみちがよくわかりません．楕円的，放物的，双曲的という３種類に分けるだけなら，K の符号だけで十分なのではないですか？

答． その通りですが，曲面のもっと詳しい解析には K の数値自体も必要になります．また，ガウス・ボンネの定理と呼ばれる非常に有名な定理では，ガウス曲率を曲面上で積分します．後で説明します．ところで，ガウス・ボンネの定理はあまりにも有名な定理なので，皆さんが「数学科卒業です」とどこかで自己紹介したときに，じゃあ，ガウス・ボンネの定理を知っていますかと問われることも多いかなと思います．(ホントかな？) そのとき皆さんは北大数学科の恥にならないように答えられますか？

問． 球面の場合は各点で楕円的とみてよいのですね？

答． そうです．気付かれてしまいましたね．

問． トーラスで，放物的な点からなる曲線部分は $\cos u = 0$ としていいのですか？

答． その通り．よく気付いたね，ワトソン君．

問． 外積の定義は何ですか？

答． 解答 No.1 〜 No.4 のどこかに参考になる情報があります．どこかな？

問． ４次元以上の外積は？

答． 考えません．

問． 法ベクトル (normal vector) のどこが normal なのか “法”なのかわかりません．

答． 日本人は昔から，垂直に立てた柱を信仰していたようです．いまでも，諏訪の御柱 (おんばしら) 祭というのがありますね．そういえばストーン・ヘンジというのもありましたね．人類共通ですか．垂直に立っているものはいかにも normal という感じがしますね．“normal” を The concise Oxford dictionary でひくと，第１義に standing at right angles とありました．right angle は直角の意味です．normal と right は似たような意味ですね．(私 (石川) はもともと左ききなので，この用法も気にいりませんが．) normal を「法」と訳したのが誰かは知らないし，その事情は審か (つまびらか，と読みます) でないですが，ちゃんとしている，法 (のり) にのっとっている，という感じがしませんか？また，法 (のり) には，土木用語で，「傾斜面の傾き」という意味もあります．でも，はっきりしたことはわかりませんでし

た．この質問に関して何か情報があったら教えてください．ところで,「ちゃんとする」の「ちゃん」とは何でしょうか？

問．なぜ「トーラス」は「ドーナツ形」と言わずに,「トーラス」と言うんですか？「ドーナツ形」の方が子供にもわかって，一般的ではないですか？

答．あんドーナツには穴がないのが普通ですね．(穴をあけると，あんこがこぼれます，) ２つ穴のドーナツも (作ろうと思えば) 作れるので，かえって紛らわしいかもしれません．トーラス (torus) を英和辞典でひいたら,「円柱基の大玉縁」とありました．思わず笑ってしまいましたが，何のことでしょうね．全然質問と関係ないですが，そういえば「カマトーラス」という名前の数学の同人誌みたいなものが昔あったのを思い出しました．

問．平均曲率 H を定義したのは何故でしょうか？教科書には H に関する応用がでてきません．

答．極小曲面という大切な対象があるのですが，それは $H=0$ という条件で定義されます．教科書 p.60 の問 2.4 と第５章を参照ください．

問．板書の計算を，私がやると答がちがうのですが.

答．もう一度検算して確かめてみてください．

問．理屈よりも計算がわかりません．どこから勉強すればいいですか？

答．補足説明によれば，ベクトルの内積，外積の計算のことのようですね．まず，線形代数の教科書の内積のところを，だまされたと思って読みなおしてください．眺めたことはあるが，読んだことがないという人が多いようなので，とにかく読んでください．

問．質問書の解答 No.4 にあった，$(-1)\times(-1)=1$ になる証明 (説明) がかなり気になります．少しヒントがほしいです．

答．やはり気になりますか．私 (石川) が用意してある説明は，１つは算術的なもので，$0=1+(-1)$ ということを使います．もう１つの説明のアイディアは，実数を，その実数を掛けるという operator (演算子，作用素) とみなすというものです．ヒントになりましたか？

問．幾何学１と幾何学２はかなり違う感じなのですが，１は２に直接つながっていくのですか？それとも，１と２はそれぞれ別路線なのですか？

答．別路線です．でも，**数学はひとつ**なので，幾何学１と幾何学２ももちろん関係していて，たとえば，幾何学１では曲面を微分幾何的に，幾何学２では曲面を位相幾何的に調べます．同じ対象を，違った観点から，違った方法で調べます．こうして学問に厚みができるわけですね．両方しっかり勉強しよう．ちなみに，後期には多様体入門 (幾何学３) やホモロジー論入門 (幾何学４) が開講されます．さらにこれらを総合してトッピクスを講義する幾何学５ (多様体の幾何とトポロジー) もあります．どれも面白く，有機的に関係しあう内容です．それらもよろしくね．

問．予習のポイントを教えてください．少しずつ予習や復習をしているのですが，うまく進みません．他の授業もあり，時間があまりとれないのも事実です．先生の中には授業１時間半につき，予習復習を４時間半とれというムタイな人もいますが，計算すると授業とあわせて１８時間 (３コマ入れているので) になってしまい，人間の限界を越えています．

答．６時間寝られますね．それはともかく，予習や復習に，ある程度まとまった時間をかけないと，いくら頭の良い皆さんでも，講義内容を完璧には理解できないでしょうね．ですから，もし，皆さんが毎日３コマ講義を入れているなら，それは**講義のとりすぎ**ということです．勉強する十分な時間がとれないのだから，即刻，科目をしぼるべきです．せっかく質問してもらってなんなのですが，要領良く勉強しようとするのも良いですが，まずは受講する科目を精選すべきでしょうね．数学を甘くみてはいけません．むかしから，二兎 (にと) を追うもの一兎 (いっと) を得ず，とか，虻蜂とらず，とか，過ぎたるは及ばざるがごとし，とか，猿も木から落ちる，とか，あわてるなんとかはもらいが少ない，とかいったことわざがありますね．それはともかく，そもそも講義を受講するのは，講義内容を理解するのが目的であり，単位をとるとらないということは，あくまで結果としてついてくるものだと思います．「本末転倒」にならないよう，くれぐれも注意してください．その意味で，質問に登場する先生の言っていることは正しいのです．ムタイではなくケムタイでもなく，そうありたい，ということでしょう．

問．質問書の質問がどう評価されているか気になります．

答．やはり気になりますか．でも，それは，試験を受けて，その点数が気になるのと一緒ですね．最終的な成績を見ればわかります．でも，すこしだけ，ヒントを言うと，各質問書の点数は，0 点か，1 点か，あるいは追加の点数で，2 点になるかのどれかです．2 点をとるのは難しいです．でも，たとえば，質問書を毎回提出し，質問と認められ，各質問書の点数 1 点を確保していけば，まあ,「良」はあげられるかな，とりあえず「可」以上ではあるかな，と現時点では考えています．私 (石川) は，鬼仏表で「仏」ということになっているようなので，普通に勉強していれば問題なく合格はできるでしょう．でも，少しさぼると，不合格になっちゃうかもしれませんね．