幾何学１質問の解答　担当教官 石川 剛郎

No. ４ (１９９９年5月１２日) の分

問． 第１基本形式と第２基本形式の関係は何ですか？どのように使い分けるのですか？

答． 第１基本形式は，空間曲面の intrinsic (内在的) な性質を内包し，第２基本形式は，extrinsic (外在的) な性質を内包していると言えます．intrinsic な性質とは，この場合，曲面上の計量に関する性質で，extrinsic な性質とは，平均曲率などの，曲面の空間への入り方に関する性質を指します．それぞれ存在価値のあるもので，曲面を調べる場合，両方必要です．水戸黄門の助さん角さんのように，二人で助けあって，天下の副将軍を守ります．

問． 第１基本形式は曲面ののび具合，第２基本形式は曲面のでっぱり具合を表していると解釈して差し支えないのでしょうか？

答． とりあえず差し支えないです．曲率は曲がり具合，捩率はねじれ具合でしたね．第１基本形式は曲面の伸び縮み具合，第２基本形式は曲面の凸凹 (でこぼこ) 具合ですか．第１段階としては，このような理解でよいです．でも，こんな理解だけで満足していたら実はこまります．もっといろいろな例に馴染んで，その意味するところを深く正確に感じとるよう，さらに努めてください．それから，解答 No.2 の最初の問の答 (激励文) を参照ください．

問． 第２基本形式を作るとき $\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v$ に垂直なベクトル $\mathbf{e}$ の長さを 1 にしたのはどうしてですか？

答． 良い質問ですね．長さ 1 に正規化 (normalize) しなくても，話しはほぼ同じです．第２基本形式が，(零にならない) 関数分だけ関数倍されるだけです．でも，決めないと混乱するので，教科書通りに定義しました．

問． 関数のヘッセ行列が正定値，負定値，不定値とはどういう意味ですか？

答． 固有値がすべて正，すべて負，すべて正または負という意味で使っています．固有値がわからない人，対称行列の対角化がわからない人，２次形式の標準形がわからない人は，自分の持っている線形代数の教科書をもう一度，だまされたと思って読んでみてください．(線形代数の教科書と微積分の教科書はつねに手元に置いておくとよい．)

問． 臨界点でヘッセ行列が正定値ならば，そこで極小になるイメージがよくわかりません．

答． 具体例 $f(u, v) = u^2 + v^2$，ただし $(u_0, v_0) = (0, 0)$，で調べてみてください．

問． Hesse 行列は２変数に限らず，一般の変数の関数について考えられますか？

答． 考えられます．n 変数関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ については，$(f_{x_i x_j})_{1 \leq i,j \leq n}$ という n 次対称行列が Hesse 行列です．対称行列は，ご存じのように (直交行列により) 対角化でき，それの定める２次形式の標準形は，固有値 (この場合すべて実数) の符号で決まります．(ここの部分がわからない人は，自分の持っている線形代数の教科書をもう一度，だまされたと思って読んでみてください．) 一方，臨界点については，f のテーラー展開の２次の項が，このヘッセ行列の定める２次形式になりますね．もし，そのヘッセ行列が正則 ($\det \neq 0$) ならば，その臨界点の近くでの関数のふるまいは，ヘッセ行列の定める２次式と同じであることが知られています (モース (Morse) の補題)．したがって，とくに，正定値ならば極小であり，負定値ならば極大です．

問． Hesse 行列の Hesse と整数論で有名な Hesse は同一人物ですか？

答． 詳しく知りませんが，違う人物と思います．詩人 (作家) のヘルマン・ヘッセもたぶん違う人でしょう．

問． 第２基本形式が正定値とはどういう意味ですか？

答． 第２基本形式 $II = Ldudu + 2Mdudv + Ndvdv$ が正定値とは，行列，$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ が正定値，つまり，固有値がすべて正，いいかえれば，

$$(x, y) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Lx^2 + 2Mxy + Ny^2$$

が常に 0 以上で，0 であるのは，$(x, y) = (0, 0)$ であるときに限る，という意味です．

問． 空間曲面の第２基本形式の幾何学的意味のところで，講義で「峠点」というのが出てきましたが，どんなものですか？形は決まっているのですか？

答． 山路を登りながら，こう考えた．智に働けば角が立つ．情に棹させば流される．意地を通せば窮屈だ．とかくに人の世は住みにくい．(夏目漱石，草枕)．少し視界が広がり，木々を透かして，足の下に支笏湖が見えてきた．雲雀の声がどこかでしている．左右に山すそがせまっているが，なかなか眺めが良い．少し休憩しようか．というような地点を峠 (とうげ) とよびます．峠を越えると下りの路になります．形とは何かというと難しいのですが，曲面上の２つの鞍点 (峠点) の付近の曲面片が，回転と平行移動で移りあうとは限りません．形状を荒く分類しているのだと考えてください．

問． 第２基本形式の幾何学的意味のところで，曲面が，上に凹，上に凸，鞍状以外の場合はないのですか？Hesse 行列の行列式が零の場合はどうなりますか？穴が開いたり他の変わった現象が起きますか？

答． なめらかな曲面を考えているので，穴があいたりはしませんが，(なめらかなまま) もっと複雑な形になるかもしれません．すなわち，第２基本形式が退化している場合は，その点での第２基本形式からは曲面の形状が判定できず，より複雑な形を持つ場合も生じるということです．

問． 曲線の変曲点にあたるものは曲面では何ですか？

答． 良い質問ですね．第２基本形式が退化する点 (そのような点を「放物的な点」とよびます)，すなわち，$LN - M^2 = 0$ となる点でしょうね．そういう点は，曲面上で，“一般に”(ここでは特殊な曲面の場合を除いてという意味) 曲線を形成します．その曲線を境に，$LN - M^2 > 0$ の部分 (「楕円的な点」の領域) と，$LN - M^2 < 0$ の部分 (「双曲的な点」の領域) に，曲面が分かれます．

問． 曲面が上に凸下に凸などという状態は，曲面の場所によって変わってくるのですね？上に凹 (下に凸) というのは極小点を持っていなくても言いますね？

答． 前半部はその通りです．後半部も一般論としてはそうです．ただし，講義で扱った場合は，曲面上のある点を固定して，その点での法線方向 ($\mathbf{e}(u_0.v_0)$) の高さ関数を考えているので，その点が必ず臨界点 (この場合，高さ関数の極小点) となることに注意してください．

問． $dudv = dvdu$ は常に成り立ちますか？

答． 成り立ちます．というよりそう定義します．解答 No.3 の関連で書くと，$dudv$ も $dvdu$ も行列表示すると，ともに，$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ となって，等しくなると説明できます．

問． $dudv$ は重積分 $\int\int f(u,v)dudv$ の $dudv$ と異なる意味で用いているのですか？

答． そう思って結構です．

問． 第２基本形式を $II = -d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{e}$ とかくメリットは何ですか？

答． 第１基本形式も $I = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p}$ と表されます．メリットは「簡単」なことです．簡単なことは良いことです．複雑なことは悪いことです．簡単な表記法を導入することを，ためらう必要はありません．

問． 高さ関数を考えるときのベクトル $\mathbf{a}$ は長さ 1 にとるのではないですか?高さ関数の意味は何ですか?

答． そうです．$\|\mathbf{a}\| = 1$ です．高さ関数の意味は，図形を回転して，高さをはかることです．曲面の凹凸をしらべる場合は，$\mathbf{a} = \mathbf{e}(u_0, v_0)$ ととりました．つまり，パラメーターが (u_0, v_0) であるような，曲面上の点をとり，その接空間が水平になるように (そして，$\mathbf{e}$ が上向きになるように) 回転してときの高さをはかったわけです．$\mathbf{e}$ は ($\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v$ の張る) 接平面に垂直なので，その高さ関数について，いま指定している点は臨界点です．そして，その Hesse 行列が，第２基本形式の定める行列と一致します．

問． 臨界点は点でしか存在しないのでしょうか?臨界点が線の状態で存在する場合がないのでしょうか?その場合，線なのに臨界点とよぶのは変だと思うのですが．

答． 「孤立」という言葉があります．その言葉を使うと，確かに，臨界点は孤立しているとは限りません．その “点” では君の言う通りですが，質問の最後の部分は，理解できません．線は点の集まりですから，臨界点が集まって，線になって何が悪いのか理解できません．

問． 第３基本形式とは何ですか？

答． 教科書 p.60 の問 2.2 を参照してください．それによると，結局，第３基本形式は，第１基本形式と第２基本形式で表されるということがわかります．したがって今後は，曲面の第１基本形式と第２基本形式のみを扱っていきます．

問． 教科書 pp. 50–51 に「いかなるベクトルもこの３つのベクトルの１次結合として表される」とありますが，これは関数やパラメーターで表せるということですか？

答． 質問の意味がよく把握できなかったのですが，ベクトルという場合，それは一つのベクトルであって，固定されていると考えてください．曲面の話の場合，曲面上の１点を任意に固定して考えていると思ってください．その後で，点を動かすのです．この「任意に固定する」「点を動かす」というニュアンスがわからないと，数学はなかなか理解できないかなと思います．

問． 外微分とはなんですか？外微分の幾何学的意味は何ですか？

答． **関数の外微分**は，各点での関数の１次近似を記号化したものです．関数 $f = f(u,v)$ に対し，その外微分 df は $f_u du + f_v dv$ と定義されます．du, dv は記号です．f_u, f_v は f の偏微分で，それぞれ関数です．したがって，df は du, dv の関数による１次結合ですね．f の外微分は，幾何的に，f の等高線の接線の方程式を記号化したものです．一般の変数の関数 $f = f(x_1, \dots, x_n)$ の場合，$df = \sum_{i=1}^n f_{x_i} dx_i$ です．dx_i は記号です．f_{x_i} は偏微分です．df は f の等高面 (level set) の接空間の方程式を記号化したものです．皆さんの馴染みのありそうな場合に説明してみましょう．３次元空間内のグラフ $z = f(x,y)$ を考えます．そのグラフは，関数 $F(x,y,z) = z - f(x,y)$ の零面ですね．外微分は $dF = dz - f_x dx - f_y dy$ となります．グラフ上の点 (x_0, y_0, z_0) を「任意に固定する」と，

$$dF(x_0, y_0, z_0) = dz(z_0) - f_x(x_0, y_0)dx(x_0) - f_y(x_0, y_0)dy(y_0)$$

となりますね．(関係しない座標の部分は書き入れていません．) ここで，$dx(x_0)$ を $x - x_0$ に置き換え，

$dy(y_0)$ を $y-y_0$ に置き換え，$dz(z_0)$ を $z-z_0$ に置き換えてみる (このことは，$dx(x_0)$ と $x-x_0$ が同じものであると主張しているわけではありません) と，(x,y,z) 空間での $f=f(x,y)$ のグラフの点 (x_0,y_0,z_0) での接空間の方程式になりますね．(最後の部分がわからない人は，微分の教科書をもう一度復習してください．) こういう意味で，関数の外微分は，接空間の方程式を記号化していると言っているわけです．

問． 教科書 p.49 の Δu と du はどう違うのですか？

答． 差分と微分の違いです．差分 $\dfrac{\Delta u}{\Delta t}$ の極限が，微分 $\dfrac{du}{dt}$ です．ただし，単独の du をどう解釈するかは，少し難しいです．すでに，置換積分などでは自由に使ってしまっている記号と思いますが，ここでは du は微分形式と考えます．ベクトル (場) を入力すると，スカラー (関数) を出力するものととらえるのが，正しい解釈です．

問． 第２基本形式は２つの曲線に関して曲面を決定する規則になっているのですか？

答． ２つの曲線から，曲面を決めるというのは，無理があるかと思います．

問． 第１基本形式の例で，球面のとき，$\|\mathbf{p}_u\| \geq \|\mathbf{p}_v\|$ なのではないですか？板書の図ではそうなってなかったと思います．

答． ご指摘の通りです．

問． 球面の極座標表示で，$-\pi < u < \pi$ ではないのですか？

答． 教科書 p.43 を見てください．u は “経度” のパラメーターなので，$-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ で間違いありません．私 (石川) は正しい．

問． $\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v$ が１次独立ならば，なぜ $\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v \neq \mathbf{0}$ なのですか？

答． すでに質問を受け，それに答えています．解答 No.1 〜 No.3 をよーく読んで解答を探してください．(このやり方だと，同じ質問にいちいち答えなくてよいので楽です．)

問． 教科書 p.51 の Christoffel (クリストフェル) の記号の意味がわかりません．

答． とりあえず，$\mathbf{p}_{uu}$ 等を $\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v, \mathbf{e}$ で表したときの係数として理解すればよいかなと思います．でも，実は深い意味があります．たとえば，接続や測地線の概念と関係して重要です．教科書 p. 114 の問 5.2 を参照ください．

問． 超弦理論を理解するには幾何学だけ勉強すればよいのですか？

答． もちろん物理も併せて勉強しなければダメでしょうね．

問． 幾何学１の内容に関する他の参考書はありますか？

答． いま使っている教科書が,「超わかりやすい」と評判の本なのですが，他の本を挙げろと言われれば，たとえば，小沢哲也著：曲線・曲面と接続の幾何，培風館，もおもしろいと思います．他にも，図書室や書店で,「微分幾何入門」とか「幾何学なんとか」などといったの題名の本をながめてみたら良いのではないでしょうか．

問． No.1 の解答のところで，曲率半径は，曲率の逆数の絶対値と書いてありますが，曲率半径の単位が m(メートル) のとき，曲率の単位は $1/m$ となりますが，これはどういうことですか？(再掲)

答． $\mathbf{p}$ の単位は m，弧長 s の単位も m，したがって，$\mathbf{p}'(s) = \dfrac{d\mathbf{p}}{ds}$ の単位は 1，$\mathbf{p}''(s)$ の単位は $1/m$ だから，$\kappa = \|\mathbf{p}''(s)\|$ の単位も $1/m$ となりますね．質問した人，これで納得しましたか？

問． 今回も質問はありません．

答． 単位を取るつもりがなかったら構いませんが，もし，単位を取りたいのなら，何でも良いから質問してください．たとえば (これは講義と関係ないので良くない例ですが) 「-1 と -1 を掛けるとなぜ 1 になるのですか？」というような程度の質問でも我慢します．ところで，皆さんはこの質問に上手に答えられますか？２通りの説明の仕方を考えてみてください．(特に教員志望の人．)

問． 講究の単位はどのようにつけるのでしょうか？

答． 講義と同じ成績をつけます．私 (石川) の講義では，予習，質問，小テスト，レポート (休講のとき実施する予定) が一体となって講義の成績となるので，とりたてて講究の成績を別につける必要性がないからです．

問． 結局何のためにやっているの？ということが大学の講義の中にはとても多いのですが，石川先生は，この大学の数学はどういうものとお思いですか？

答． 北海道大学の数学科は，やや自画自賛になりますが，全国でも有数の優秀なスタッフを集めたレベルの高い学科であるという定評があります．とくにここ数年，ますます良くなったと評判です．そんな中で，君がもし勉強する目的を見失っているとしたら，非常にもったいない話ですね．この大学には偉い先生がたくさんいるのだから，受け身にならず，積極的に，どんどん質問すればよいのです．