幾何学１質問の解答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. 3（１９９９年4月２８日）の分

問． 空間曲面の第１基本形式 $I = Edudu + 2Fdudv + Gdvdv$ はどういう意味をもつか，具体的に教えてください．

答． ある地域 (具体的に札幌市北区) の地図を見る場合，それがどのような縮小率で描かれているかの表示がもしなかったら，その地図は使いものになりませんね．地図上の 1 cm が実際に何メートルに対応しているかわからなければどうしようもありません．だから，縮尺はどの地図にも明示されています．比喩的に言うと，その縮尺がまさに第１基本形式です．ただし，普通の地図では通常，縮小率はその地図内で一定ですが，われわれが考察している，(u, v) 平面による曲面のパラメーター付けの状況では，縮小率 (拡大していることも考えられます) は，(u, v) 平面の場所にもより，また，方向にも依存しているでしょう．それを表現するために，(u, v) の関数が３つ必要になります．なぜ３つなのか．実際の曲面上での距離を再現しようと思うと，曲面上の曲線の長さを知る必要があり，そのためには，その曲線の速度ベクトル，それは曲面に接するベクトルでありますが，その長さを知らなければなりません．そのためには，接ベクトルの内積を求めるわけですが，いま考えているのは２次元ですから，基底が２つあり，それらの内積のデータ $(2 \times 2 = 4)$ が指定されていればよいわけです．でも内積は対称ですから，結局３つのデータで記述できるわけです．これが曲面の第１基本形式です．よく知っている人のために１言付け加えると，空間曲面の第１基本形式は，$\mathbf{R}^3$ のユークリッド計量の，(u, v) 平面への引き戻しのことです．

問． グラム行列の意味がわかりません．第１基本形式を行列で表す意義はありますか？

答． 基底が与えられたとき，勝手なベクトルの内積は，基底のベクトルどうしの内積のデータだけから計算できます．その基底の内積のデータの表がグラム行列です．内積の性質から，グラム行列は，正値対称行列になります．第１基本形式を行列で表現することは，線形写像を行列で表現するのと同様の，基本的は方法であり，あたりまえに有用です．

問． 第１基本形式は曲線での曲率にあたるものと考えてよいのでしょうか？

答． よくないです．実際，第１基本形式は，１階偏微分の情報しか含んでいないですね．曲率を考えるには，２階偏微分の情報まで必要です．曲面の曲率を定義するには，第２基本形式まで必要になります．そして曲面の曲率は，これら基本形式そのものではなく，それらから抽出されるエキスのようなもの (不変量) であると考えるとよいかと思います．ただし，曲面の場合，曲率にはいろいろなヴァージョンがあって，そのうち，**ガウス曲率**というものは，第１，第２基本形式から定義されるけれども，実は，第１基本形式だけから定まるという「ガウスの驚くべき定理」が知られています．後ほど解説します．

問． 第１基本形式や２次形式や微分形式の「形式」とは何ですか？

答． とりあえず，日常用語でいう「形式的」(formal) なものと思ってよいです.「形式的べき級数」という数学用語もあります．しかし，質問の場合，すべて，(パラメーターつき)「双線形形式」の特別なものとみなされるので，その意味で形式とよぶにふさわしいと考えても良いです．(双線形形式については，たとえば，石川他著「線形写像と固有値」の p. 90 を見てください．) この場合，形式は英語では form といいます．

問． 第１基本形式に出てくる，$dudu, dudv$ 等の記号がわかりません．

答． いまはわからなくても心配いりません．慣れるとわかってきます．でもあえて説明すると，$dudu$ や $dudv$ は，接空間上の対称双線形形式であり，((u, v) 平面の標準基底に関し) 行列表示すると，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ となるもののことです．ベクトルを２つ入力すると，実数を出力するようなものです．(u, v) 平面上の曲線 $u = u(t), v = v(t)$ (これは，曲面上の曲線に対応するわけですが) の速度ベクトルと速度ベクトルを入力すると，$\dfrac{du}{dt}\dfrac{du}{dt}$ や $\dfrac{du}{dt}\dfrac{dv}{dt}$ が出力されます．わかるかなあ？

問． 第１基本形式の E, F, G という記号に意味はありますか？他のアルファベットではだめですか？第１基本形式の I はどこからきているのでしょうか？

答． ほかの記号でももちろんよいです．ただし，古典的にほぼ定着している記号だと思うので，むやみに変えると混乱を生じるかと思います．第１基本形式の I は，ギリシャ文字の数字の１です．ちなみに第２基本形式は II と表します．以下，$III, IV, V, VI, \ldots$ と続きます．ただし，空間曲面については，第４形式以上は考えません．また，講義では，非常に重要な第２基本形式までを考察します．

問．「小行列式」とはなんですか？小行列式で行列の階数が調べられるとのことですが，どういうことですか？

答． 小行列は習ってなかったかもしれませんね．失礼しました．でも，皆さんの知識の範囲内で，簡単に説明できるので，だいじょーぶ．いま，$m \times n$ 型行列 A の m 個の行から r 個選び，n 個の列から r 個選んでできる r 次正方行列の行列式を，A の r 次**小行列式**とよびます．このとき,「A の階数が r で

ある必要十分条件は，A の $(r+1)$ 次小行列式がすべて 0 であり，ある r 次小行列式が 0 でないことである」ということがわかります．このことは，皆さんがご存じの,「行列の階数は，行ベクトルの１次独立な最大個数であり，同時に，列ベクトルの１次独立な最大個数でもある」ということから導くことができます．線形代数の良い演習問題なので，考えてみてください．

問． $\mathbf{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ のヤコビ行列の階数が 2 ということと，$\mathbf{p}_u$ と $\mathbf{p}_v$ が１次独立という条件はどうつながりますか？ベクトルの外積の計算と関係しますか？

答． 階数が２ということは２つの行ベクトルが１次独立ということなので，当然，$\mathbf{p}_u$ と $\mathbf{p}_v$ が１次独立という条件になります．この条件は，$\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v \neq \mathbf{0}$ と同じ条件です．実際，外積は，３つの 2 次小行列式を，(適当に符号をつけて) 並べてできるベクトルですから．

問． 陰関数表示された曲面 $F(x,y,z) = 0$ は，必ずパラメーター表示 $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$ できますか？３次元空間で，$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$ とパラメーター表示できる曲面は多様体になるのでしょうか？

答． 前半は，勾配ベクトルが零ベクトルではないという条件があれば，必ずできます．これは陰関数定理とよばれる基本的定理からの帰結です．微分学の教科書，あるいは，泉屋，石川著「応用特異点論」共立出版 の §1.1 をみてください．後半は，ヤコビ行列の階数が 2 という条件があれば，そして，(u,v) の動く範囲を小さく限定すれば正しいです．多様体とはなにか，詳しくは，後期の幾何学３の講義で学ぶことになると思います．

問． ３次元空間のどんな曲面も関数やパラメーター表示で表すことができますか？

答． どんな曲面といった場合，どういうものを指すのか明確でないですね．そこをクリアにするために，対象を数学的に規定して，議論しているわけです．そうしないと，せっかく作った理論の適用範囲がわからなくなってしまいますからね．

問． ベクトル場とはどういうものですか？

答． ちなみに “ベクトルじょう” とは読まず，“ベクトルば” と読みます．単独のベクトルではなく，パラメーターに依存したベクトルの族をこうよびます．講義に出てきた $\mathbf{p}_u$ はベクトル場の例です．$\mathbf{p}_v$ もそうです．くわしくは，後ほど説明します．

問． 計量とは何ですか？内積をとるという行為の幾何学的な意味は何ですか？

答． 計量とはベクトルの内積のことです．もともと，幾何学は，測地学から生まれたものであり，距離という概念が重要ですが，その距離は，ベクトルの内積をもとに定義されるので，内積をとるということは必然的に，幾何学で重要ということになります．

問． $\cosh u$ や $\sinh u$ は何ですか？ $\cos u$ や $\sin u$ と何がどう違うのですか？

答． hyperbolic cosine や hyperbolic sine です．微分の教科書 (たとえば，上見他著「微分」共立出版, p. 22) を見てください．

問． 「線形常微分方程式」の意味を教えてください．微分方程式が線形とはどういうことですか？

答． 未知関数とその導関数たちの１次式であるような微分方程式を**線形微分方程式**といいます．微分の変数が１変数 (われわれの場合，弧長パラメーター s) の場合，**常微分方程式**とよびます．

問． なめらかな曲面とはどういうことですか？パラメーターのとり方で曲面がなめらかになったり，ならなかったりするのはおかしいと思います．なめらかでない曲面とはどのような曲面のことをいうのですか？

答． まずはじめに,「なめらか」という言葉で，微分可能性を表すときと，非特異性を表すことがあります．だいたい文脈でわかる場合が多いのですが，紛らわしいですね．とにかく，ここでは非特異性を表します．なめらかな曲面とは，この場合，ひとことでいうと２次元**部分多様体**ということです．部分多様体とは何か詳しく知りたい人は，後期の幾何学３を受講してください．ここでは，**階数の条件** (immersion **の条件**) **を満たすようなパラメーターづけが少なくとも１つある** というのが「なめらかな曲面」であると考えてください．(ですから，他のパラメーター付けに取り替えると，階数の条件は成り立たなくなることも有り得るわけです．) たとえば，球面の極座標表示の場合，北極と南極では階数の条件が崩れているのですが，そのことは，北極と南極ではなめらかな曲面ではないことを意味するわけではありません．北極や南極で階数の条件をみたすように，パラメーター付けを取り替えられるからです．(でもその際，別の場所では条件が崩れるはずです．あちらを立てれば，こちらが立たず．) なめらかでない曲面の例としては，たとえば，円錐 (えんすい) などがあります．

問． パラメーターのとり方には慣例のようなものはありますか？球面や一様双曲面やトーラスのパラメーター付けが，どうして講義でやったように与えられるかわかりません．自分で導く簡単な方法はありますか？

答． 球面の極座標が通常あのような形にとられているのは，ペンギンや白熊が苦情を言わないからかもしれません．それはさておき，まあ，慣例のようなものもありますね．講義で扱った球面ような良く知られた場合はそうですね．これは先人が苦労して見つけたものなので，ありがたく使わせていただきましょう．自分で導くことも大切ですが，もしそうする場合は，なるべく人に頼らず，試行錯誤でやった方が，楽しいし，実力がつくと思います．

問． ヤコビ (Jacobi) 行列とは何ですか？

答． 微分の教科書 (たとえば，上見他著「微分」共立出版，p. 85，あるいは，三宅著「入門微分積分」培風館，p. 87) を見てください．また，泉屋，石川著「応用特異点論」共立出版，p. 14 に一般的な定義が書いてあるので参考になるかもしれません．

問． なめらかな曲面を定める条件がなぜ rank2 なのですか？なめらかになるための必要十分条件ではなく，十分条件ではないですか？階数が 1 だと，どのように都合が悪いところが現われますか？

答． 十分条件です．逆写像定理，あるいは陰関数定理からの帰結です．これらの基本的定理については，微分学の教科書，あるいは，泉屋，石川著「応用特異点論」共立出版 の §1.1 をみてください．階数が 1 だとだめな例は，たとえば，$\mathbf{p}(u,v) = (u^2, u^3, v)$ ですね．このヤコビ行列の階数は 2 ではなく，1 ですね．これの定める曲面を思い浮かべてください．なめらかな曲面といえますか？

問． 空間曲面を考えるときには，空間曲線のところで学んだようなことは使わないのですか？

答． おおいに使います．数学では，使えるものは何でも使います．でも，曲線にはない曲面特有のむずかしさはあるので注意してください．

問． 空間曲面を u と v でパラメーター表示する場合は，一般的に u,v は角度とするのですか？曲線のときは，パラメーター t を時間と考えればわかったのですが，u,v はどんなイメージをもてばよいのでしょうか？

答． 角度とは限りません．状況によります．どのようなイメージを持つかは個人の自由です．パラメーター t も，時間と思ってもよいし，角度でもよいし，温度でも，なんでもよいわけです．同様に u,v も角度でもよいし，温度と湿度でもよいし，時間と角度の組み合わせでも，なんでもよいのです．どの場合でも (数学的な仮定さえ満たされていれば) 適用できるのが，数学の特徴だからです．

問． トーラスに対する理解は，空間内の円と，それに垂直な方向の円の直積で構成される，というのでよいでしょうか？

答． 質問には図がついていたのでわかりました．良いと思いました．トーラスは，幾何学２ (トポロジー) でも出てくる曲面だと思います．同じ対象ですが，その問題意識によって，どういった性質を調べるかということも，調べる方法も，かなり異なってくるということに注意して講義を聞いてください．

問． 一様双曲面のグラフを覚えることで何か役にたちますか？

答． ただ覚えても，何の役にもたたないと思います．ところで，数学では,「覚える」という単語は，どちらかというと禁句です．数学は暗記科目ではないからです．セミナーなどで先生に質問されて，もしわからないとき,「覚えていません」というより,「わかりません」といった方が，先生の “覚え”がよくなるかもしれません．

問． 一様双曲面はどのように相対性理論と関係するのでしょうか？

答． 正確にいうと，空間が２変数で，それに時間が加わって，３次元ミンコフスキー空間を考えるとき，ユークリッド空間での球面に相当するものとして，一様双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1, (a = b = c = 1)$ が現われます．自分で相対論の本をひもといて，調べてみて，できれば私 (石川) に教えてください．

問． 接平面とは何ですか？

答． 偏微分のところで習ったものと同じ意味でつかっている用語です．しかし，明確に定義するのは比較的むずかしく，一言でいえば，曲面上のある点を考えて，曲面上のその点をとおるような曲線の速度ベクトルとして実現されるようなベクトルの集まり，ということになります．それは，２次元のベクトル空間になることがわかるので，われわれの場合，$\mathbf{p}_u$ と $\mathbf{p}_v$ で生成される２次元ベクトル空間と一致します．定義は後ほど改めてすると思います．また (抽象化された) 一般的な定義は，後期の幾何学３の講義でなされると思います．期待していてください．

問． $\mathbf{p}_u$ と $\mathbf{p}_v$ が１次独立ならば，$\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v = 0$ とはなりませんか？

答． $\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v = 0$ となるのは，直交する場合のみです．１次独立ということは，単に，どちらも零ベクトルではなく，しかも平行ではないということですね．線形代数学を復習してください．

問． 前の講義の話になりますが，４次元以上の空間の曲線の曲率や捩率などはありますか？

答． あります．No.2 の解答をみてください．

問． κ (曲率) や τ (捩率) を与えると空間曲線がさだまるということですが，その曲線は，無限に一定の形をもった曲線になるのですか？

答． κ や τ はパラメーターの関数であることに注意してください．したがって形は変化していきます．また，パラメーターの範囲が限定されていれば，途中で途切れます．

問． 教科書 p.46 の問 1.1 はどうすれば解けますか？

答． 単にパラメーターを消去して，陰関数表示とくらべてみるというのが，問題の意図と思います．解いてみてください．

問． 極座標表示の空間曲線の曲率や捩率を求める公式はあるのでしょうか？

答． 極座標とは限らないのですが，一般的な公式は，教科書の p.30 問 4.2 にあります．それをあてはめて計算してみると，極座標の場合の公式ができると思います．(私 (石川) は具体的な公式を知りま

せん．）少し計算が大変かもしれませんが，自分で計算を実行して公式を確立してみると，君の確かな知的財産になるかと思います．

問．平面を曲面に写したとき，曲面上に平面上のベクトル空間を対応させることができれば，平面曲線の曲率と，その像の捩率の関係がわかるのではないでしょうか？

答．この質問は，非常に良い質問を内包しているように思われます．ただし，明確に質問をのべるためには時期尚早であり，もう少しいろいろなことを学んでみたあとで質問しても遅くはないように思います．ここでは安易に答えないでおきますが，自信をもって研鑽して，また質問してください．

問．(超) 弦理論と幾何学の絡みは？

答．(超) 弦理論は，物理の理論を統一するために考えられた理論だそうです．でもまだ統一はされていないそうです．とにかく，その際，必要不可欠なのは幾何学の概念だと思いますね．たとえば曲率の概念 (いま講義でやっていることを，もっと，もっと抽象化し洗練したものですが) などは，現代理論物理学では，しばしば登場する重要な概念となっています．

問．ξ (グザイ) 等のギリシャ文字は書きにくいので他の文字を使った方がわかりやすくなるのではないでしょうか？

答．その通りですね．講義ではなるべく紛らわしい文字は使わないようにしましょう．でも教科書と合わせたほうが良い場合もあるので，そのときは使うかもしれません．また，それとは別に，ギリシャ哲学やギリシャ文字などのギリシャ文明の遺産は，人類の共通財産であり，西欧文化 (いろいろ問題も起こしていますが) の源であり，数学の１つの源泉でもあるので，できるかぎり守っていきたいと思います．

問．この調子で，教科書は全部終わるのですか？

答．べつに全部終わる必要はないと思っています．肝心なのは，皆さんにどれだけ理解してもらうかということなので，進度はあまり気にしていません．ですから，皆さんも，毎回指定している予習箇所にこだわらず，教科書の先の方までどんどん読み進んで，どんどん高度な質問をしていただいても，もちろん結構です．私 (石川) はいつでも受けてたちます．教科書には，まず学ぶべき基本的な事項や定評のある理論が，めやすとして書いてあるだけです．実は，教科書に書いていないその先にも，おもしろいことがまだまだたくさんあるのです．そして，それを勉強するかどうかは，皆さんの意欲次第ということになります．そうです，学問に終わりはないのです．

問．数学用語がわかりません．何かよい辞書はありますか？

答．専門家に定評があるのは，日本数学会編「数学辞典」(岩波書店) です．図書室にあります．でも少し高度かもしれませんね．他にも数学の良い辞書 (この場合，事典というべきでしょうか) がたくさんあるかと思います．数学図書室の方々は図書に関するプロなので，聞いてみるといろいろ教えてもらえると思います．(私 (石川) もいろいろ教えてもらっています．)

問．幾何学を勉強する上では左利きの人の方がやはり有利なのでしょうか？

答．いちがいにはいえないと思います．有利な面，不利な面，いろいろあると思います．でも，それはささいな違いであって，重要なことはそれ以外の点 (センス，意欲，環境などなど) にあるような気がします．

問．質問書を書かせるということは，講義中に質問は受け付けないということですか？

答．そんなことはありません．板書の書き間違いなどの指摘や，すぐ答えられる (と思われる) 質問は，どうぞ講義中にしてください．でも，質問書に書いてもらえれば，頭の回転が鈍い私 (石川) でも，ゆっくり考えて答えられるので助かります．皆さんも，質問の補足説明を考えている段階で，もともとの質問がわかってしまい，さらにその先の質問を思いつくというメリットもあろうかと思います．ですから，質問は良く考えてから質問書に書いて，しかもその補足説明を書くのが，お互いに良いかと思います．

問．どの程度の質問まで許されるのでしょうか？もし，わかっていることをわざと質問しても許されるのなら，それで点数かせぎできるのではないですか？

答．質問書の解答に掲載されている他の人の質問に自明なものも多くある，ということからの指摘のようですね．でも，何がわからないかは人により事情があって，千差万別です．補足説明から事情が納得できるものについて答えています．私 (石川) は，皆さんが素直にわからないことを質問していると信じています．信じていないで教壇にはたてませんからね．何を質問するかは，結局，君たちの見識の問題です．(同時にそれに答えるこちらの見識も問われています．(財津一郎のまねで) 非常にきびしいー．) そもそも，独創は素朴な問から出発します.「裸の王様」の子供のように権威を気にせず，納得するまで考える勇気を持ちましょう．そうしながら，自分自身の知的世界を徐々に構築していってください．それから，誤解のないように言っておきますが，解答に掲載されることとポイントを得ることは無関係です．掲載されたからといって点数になるとは限らないし，掲載されないからといって点数にならないというわけではありません．その他の助言，指摘も有難いですが，質問でなければ残念ながらポイントにはなっていません．あくまで公表している基準に基づいて評価しています．まあ，こちらはプロですから，ニセの質問はすぐに見破れます．そう判断した場合，これは質問とみなされませんから，ポイントは 0 ポイント (欠席や白紙と同じ) と評価します．どうぞご心配なく．