幾何学１質問の解答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. 2 (１９９９年４月２１日) の分

問． 空間曲線の曲率 (curvature) や捩率 (ねじれ，torsion) の意味は何ですか？

答． 市販の針金を買ってくると，たぶん丸く曲がっていると思います．直線の状態で売っていたら非常に危険ですからね．でも，ねじれてはいないと思います．ねじれていたら買わないですね．たぶん，平面曲線の状態で売られていると思います．(厳密にいうと，針金には太さがあり，曲線とはいえないのですが．) これが捩率 0 の状態です．買ってきて，さあ使おうと，針金の端を，(針金ののっている平面と垂直は方向に) 持ち上げた瞬間に，ねじれが生じます．(針金が形状を記憶していれば) もう平面曲線に戻らないと思います．このような，空間における曲線の曲がり具合，ねじれ具合を明確化するために，微積分を使って数学的に具現化したのが，講義で説明した曲率や捩率です．それで，かえって分かりづらくなったと考える人がいるかもしれませんが，それは完全な認識不足です．というのは，単に曲がり具合ねじれ具合といっても，実際，人によって解釈が百人百様ですから，そのままでは社会は混乱し，橋は落ち，建物は崩れ，人工衛星は君の頭上を直撃するでしょう．(こう書くと，人工衛星と捩率はどのように関係しますか？といった質問がでてきそうですが，君たちももう大人だから，おじさんのささやかなユーモアを許容してくれると期待しています．) さて，そのとき必要なのは，なんといっても，明確な概念，人類共通の方法，世界中どこにいっても曖昧さがなく意味が通じあえる定義であり，それを提供することが数学の大切な使命なのです．このことは他のことがらについても，当然あてはまります．そのために，われわれ数学関係者は日夜がんばっているわけですね．その意味で，数学を学んでいるということに皆さんも大いに誇りを持ってください．それはともかく，曲率，捩率の具体的な定義をもう少し詳しく説明してみましょう．いま，曲線の形にのみ注目したいので，パラメーターづけを弧長パラメーター s に統一して考えることは了解されているとします．(ちなみに，これに関しては，No.1 の解答も参照ください．) そのとき，単位接ベクトル $\mathbf{e}_1 = \mathbf{p}'(s)$ の微分すなわち $\mathbf{e}_1' = \mathbf{p}''(s)$ の大きさが曲率であり，ちょうど，曲線の曲がり具合を表します．さらに，その方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_2 = \dfrac{\mathbf{e}_1'}{\|\mathbf{e}_1'\|}$ の微分 $\mathbf{e}_2'$ が，$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ の張る平面からどれだけはみだしているか，いいかえると，$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ 方向の成分がいくらになるかに注目し，それを捩率と呼ぶわけです．(率という言葉づかいにこだわる人がいるかもしれませんが，もともと微分とは，平均変化率の極限であることを思い出してください．)

問． 曲率と捩率が一定の空間曲線に特徴はありますか？

答． 平行移動と回転移動を除いて，常らせん (helix) に限るという特徴づけがあります．つまり，そのようなものは，適当な平行移動と回転移動で移すと，適当な a, b に関して，講義の例で扱った常らせんに重なる，そして，その逆もなりたつというわけです．教科書の p.27 を見てください．

問． $\kappa_1 = \kappa_2, \tau_1 = -\tau_2$ となる空間曲線は，鏡あわせになりますね．

答． そのとおりです．ちなみに，鏡の国では，右手系が左手系にかわる，したがって，$\mathbf{e}_3$ のかわりに，$-\mathbf{e}_3$ を基準にとることになるので，τ が $-\tau$ になります．

問． 空間曲線の捩率 τ は，平面曲線でいうところの曲率と同様のものなのでしょうか？

答． 大切な不変量という点では同類ですが，やはりその名のとおり，空間曲線の曲率と平面曲線の曲率の方により多くの類似性があります．捩率は，空間の次元 (自由度) が１つ増えた関係で曲線を識別するのに必要になった，第２の不変量と考えるとよいかと思います．

問． 捩率は，空間曲線が自由に空間をさまよっている度合いを数量化したものと考えていたのですが，それで正しいですか？

答． 残念ながら，自由にとか，さまよっているとかの意味がはっきりしないので，正しいとか正しくないとか言えませんね．気持ちはわかりますが．

問． 捩率の τ の意味がわかりません．幾何学は目で見てわかるとおっしゃっていたので，絵で納得したいです．

答． 質問の主旨と関係ないかもしれませんが，私 (石川) は，「幾何学は目で見てわかる」といった覚えはありません．イメージが大切ということはいいましたが．実際，ポントリャーギンやモランは歴史に残る偉大な幾何学者ですが，かれらは盲人です．でも，とても豊かな幾何学的イメージをもった人達です．また誤解を招く表現になるかもしれませんが，幾何学で大切なのは，心の目でみることです．

問． 空間曲線の曲率や捩率は，曲線を分析する上でどのような役割を果たしているのでしょうか？

答． 決定的な役割を果たします．曲線のどういう性質を分析するか，その問題意識によるのですが，もし，平行移動，回転移動で変わらない性質を分析するには，曲率と捩率さえわかっていればよいのです．教科書の p.27 の定理 4.2 を見てください．

問． 空間曲線の曲率 κ が正になるのはなぜですか？

答． $\kappa(s) = \|\mathbf{p}''(s)\| \geq 0$ です．

問． 空間内の直線に対し，曲率は定義できないのですか？

答. できます．曲率を定義するには，$\dot{\mathbf{p}}(t) \neq \mathbf{0}$ のみ仮定すれば，弧長パラメーター s が考えられ，講義でのべたように，曲率が $\kappa(s) = \|\mathbf{p}''(s)\|$ で定義できますね．直線の場合，$\dot{\mathbf{p}}(t) \neq \mathbf{0}$ は成立し，$(\mathbf{e}_1'(s) =)\mathbf{p}''(s) = \mathbf{0}$ となるので，曲率 $\kappa \equiv 0$ です．

問. $\mathbf{e}_2$ の方向を $\mathbf{e}_1'$ の方向と定める理由は何ですか？

答. 他に適当な決め方がないからです．何か他によい案はありますか？次の問の答も参照ください．

問. 平面曲線の場合と，空間曲線の場合の $\mathbf{e}_2$ 方向の決め方の違いがわかりません．

答. 繰り返しになりますが，平面曲線の場合，$\mathbf{e}_2$ は曲線の形状にかかわらず $\mathbf{e}_1$ を反時計まわりに 90 度回転したものを $\mathbf{e}_2$ ととりました．これは，平面では，反時計まわりというのが意味をもったからですが，空間内では，反時計まわりといっても裏から見たら逆になって，意味がないですね．そこで，どうしようかと考え，それでは，曲線の形状から，詳しく言うと，$\mathbf{e}_1'$ から $\mathbf{e}_2$ を決めればよかろうと考えたわけです．ある意味で発想を転換していますね．発想を転換し，常に柔軟に物事に対処するということは，とくにこれからの時代には大切でしょうね．

問. ベクトルの外積を教えてください．

答. 外積については，いろいろな公式を含めて，泉屋他著「行列と連立一次方程式」の pp. 76–81 補足 D に丁寧にわかりやすく説明されています．参考にするとよいかと思います．

問. 空間曲線が，ある平面にふくまれるときにも，その曲率の正負は決められないのですか？

答. 正確にいうと平面の向きをきめると決まります．でも，平面の向きのとりかたは２通りあり，空間内の平面の向きを自然に決める方法がないので (空間だと平面の裏にまわり込めるので) 曲率の正負も決まらないということです．向きとはなにか，知りたい人は，幾何学の勉強をさらに続けていくとよいと思います．

問. 平面曲線を空間曲線として見たりしないのですか？

答. します．ただ，その平面が空間にどう入っているか指定して初めて，そうみなせることに注意してください．

問. 捩率 τ が負になることはありますか？

答. あります．たとえば常らせんの例では，$\tau = \dfrac{b}{a^2+b^2}$ なので，b が負なら，τ は負ですね．

問. 扱う曲線を C^∞ 級にしているのはなぜですか？C^2 級であれば，必要な仮定が満たされているときには，曲率や捩率は定義できるのではないですか？

答. そのとおりです．No.1 の解答も参照ください．

問. C^∞ 級とは何でしょう？

答. 何度でも微分できるということです．

問. 常らせん $\mathbf{p}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ の捩率は，b が大きくなると，小さくなるのではないでしょうか？

答. 講義で計算したように，捩率 $\tau = \dfrac{b}{a^2+b^2}$ ですね．いま，a のほうを固定して，b を動かしたときに，τ がどう変化するかという問題ですね．簡単な微分の問題なので，考えてみてください．

問. 板書の「C^∞ 逆関数定理 $t = t(s)$」 のところがわかりません．

答. 板書が簡潔すぎましたね．言葉を補うと,「C^∞ 関数に関する逆関数定理を使うと，$\dfrac{ds}{dt} > 0$ なので，逆に t は s に関する C^∞ 関数 $t = t(s)$ となる」ということをになりますか．省略しすぎですね．指摘感謝します．

問. 何度聞いても逆関数定理がわかりません．

答. この場合，やはり微積分の教科書をひっぱり出してきて，自分で勉強してみないと絶対にわからないと思います．受け身で講義を聞いているだけではだめかなと思います．

問. $\mathbf{p}(s)$ を具体的に書くことができますか？

答. できるときもあれば，できないときもありますね．場合によるとしか言えません．

問. 右手系とはなんでしょうか？

答. $\mathbf{R}^3$ の基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ が **右手系** であるとは，$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ を並べてできる行列式が正のときに言います．また，**左手系** であるとは，負のときに言います．私 (石川) はもともと左利きなので，こういう表現には断固抗議しますが，それはともかく，これが標準的な定義です．ただし，絵を書く場合は $\mathbf{R}^3$ の座標軸は，通常のようにとっておいた上での話しです．

問. 講義で，$\mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ から $\mathbf{e}_2' = \mu\mathbf{e}_1 + \tau\mathbf{e}_3$ と表される，とありましたが，どうしてですか？

答. いま，$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ は直交基底なので，$\mathbf{e}_2'$ が $\mathbf{e}_2$ と直交すれば，$\mathbf{e}_2'$ は $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ の生成する部分空間に属しますね．(ここの部分がわからないひとは，線形代数の教科書 (たとえば，石川他著「線形写像と固有値」共立出版) をもう１度復習してください．) そのときの１次結合の係数を μ, τ と書いたまでです．ただし，この場合，frame で議論しているので，μ, τ ともに，パラメーター s に依存する関数であるこ

とに注意してください．

問． $\dot{\mathbf{p}}(t)$ と $\mathbf{p}'(s)$ の記号の使い分けについて教えてください．

答． 講義でも述べたし，No.1 の解答にも書いてあります．

問． 講義で，$\mathbf{e}_3'$ は $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ と直交するので，よって $\mathbf{e}_3' = -\tau \mathbf{e}_2$ となる，というところがわかりませんでした．

答． いま，$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ は直交基底なので，$\mathbf{e}_3'$ は $\mathbf{e}_2$ のスカラー倍ですね．そこで，$\mathbf{e}_3' = \alpha \mathbf{e}_2$ とおいてみましょう．(なんで α が突然出てくるのか戸惑う人がいるかもしれませんが，これはとりあえず，あるスカラーを表したいだけなので，記号はなんでも良いのです．) まあともかく，$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3' = \alpha \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \alpha$ となりますね．また講義では，その前に，$0 = \tau + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3'$ という式を導いていたと思います．したがって，$\alpha = -\tau$ となります．つまり，$\mathbf{e}_3' = -\tau \mathbf{e}_2$ となるわけです．

問． $0 = \tau + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3'$ から $\mathbf{e}_2 = -\dfrac{\tau}{\mathbf{e}_3'}$ となるのではないですか？

答． $\mathbf{e}_3'$ はベクトルです．$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3'$ はベクトルの内積であって，普通の数の掛け算ではないです．こういう質問をうけると大学の教官としてちょっぴり悲しくなります．

問． $\mathbf{e}_1'(s) = \mathbf{0}$ のときは曲率はどうなるのですか？

答． $\kappa(s) = \|\mathbf{e}_1'(s)\| = \|\mathbf{0}\| = 0$ です．

問． 一般の $\mathbf{R}^n$ における曲線でも，曲率や捩率にあたるものはありますか？

答． あります．教科書 p.30 の問 4.3 を解いてみてください．

問． n 次元空間内の曲線は，初期条件と $n-1$ 個のパラメーターで定義できると思うのですがどうでしょうか？そのとき，曲線を $n-1$ 次元というのは不適当ですか？

答． パラメーターというより，不変量といった方がよいと思います．曲線を $n-1$ 次元というのは不適当です．

問． 弧長パラメーターとはなんですか？

答． $s = \int_0^t \|\dot{\mathbf{p}}(u)\| du$ のことです．

問． No.1 の解答のところで，曲率半径は，曲率の逆数の絶対値と書いてありますが，曲率半径の単位が m(メートル) のとき，曲率の単位は $1/m$ となりますが，これはどういうことですか？

答． わかりません．誰かわかりますか？

問． 宇宙空間を曲率や捩率で表すことができますか？

答． 宇宙空間を空間曲線の曲率や捩率で表すことができるとは思えません．(超) 弦理論のことを言っているのですか？

問． 恐縮ですが，教科書の $\mathbf{e}_2(s + \Delta s) = \mathbf{e}_2(s) + \mathbf{e}_2'(s)\Delta s + \cdots$ のところがわかりません．

答． ベクトル値関数なので，戸惑うかもしれませんが，各成分に微分学のテーラーの定理を適用すればいいわけです．

問． No.1 の解答で,「曲率半径を知らないと車の運転をあやまって命を落としてしまうかも」とありましたが，車のハンドル操作もしくは速度と，曲率半径との関係はどのようなものですか？

答． 命落とさず，スピード落とせ．とにかく，急カーブではスピードを落とさないといけませんね．これは，言い換えると，パラメーターづけを (弧長パラメーターではなく) 速度ベクトルのより小さいものにとりかえることで，見かけ上，あたかも曲率が小さいように処理している，ということができるかもしれませんね．

問． もっといろいろな例を教えてください．

答． はいわかりました．でも，講義で扱う例には限りがあるので，自分でもいろいろ探してみてください．

問． テストがないと復習する気がしないのでは？

答． 復習するかどうかは個人にゆだねたいと思います．まあ，いずれ小テストはする予定なので，お楽しみに．

問． 質問書の質問には全部解答をつけてください．

答． そうしたいところですが，(補足説明がなく) 質問の意味が不明のもの，答えようのない難問，類似の質問にすでに答えているもの等があり，すべてに答えるのは現実的に不可能です．当方の時間的制限もあるので，講義の流れで答えるべき質問を優先させることもあろうかと思います．なるべく多くの質問に答えたいとは思っているので，御理解ください．

解答者から一言：皆さんの質問は，講義をするうえで非常に参考になっています．皆さんがどういうことに疑問を持っているか，何を知りたいかは，講義をしている側には，なかなかわからないのです．皆さんも質問してみて，自分の興味がどこにあるか初めてわかるということもあるのではないでしょうか．これからも，新鮮な質問，私 (石川) をうならせるような質問，おおいに期待しています．