

# 幾何学 1 質問の解答 担当教官 石川 剛郎

## No.1 (1999年4月14日) の分

問．曲率を考える理由，目的は何ですか？応用例はありますか？

答．曲がりくねった山道を走っていくと，所々に曲率の表示があります．正確には曲率半径（曲率の逆数の絶対値）が書いてあります．それを知らないと，車の運転をあやまって，命を落とすかもしれません．幾何学としては，曲率が本質的に曲線を定めてしまうという事実が，曲率を考える主な理由でしょう．また，講義では触れませんでした，曲率が，曲線の大域的な形と密接に関係することも知られています．教科書の pp.13-22 を参考にしてください．他の分野への応用も多いようです．たとえば，曲率は，いわゆる「形の科学」で重要です．私（石川）は詳しくありませんが，雪の結晶成長では，曲率が現象を制御しているそうです．また，美術の分野では，曲率で，美しさを表現できるかもしれません．中谷宇吉郎先生の随筆で読んだ記憶があります．

問．平面曲線の曲率を定義するのに，弧長パラメーターを使う理由は何ですか？

答．曲線の曲がり具合は，パラメーターを付け替えてもかわらないはずと考えると，何か自然なパラメーターの付け方があるのではないかと，思うのは自然ではないでしょうか？それが弧長パラメーターです．比喩的にいうと，巻尺を使って，曲線に目盛りをつけていくようなものです．2つの道路のカーブを比較するには，共通の基準となる一定速度で走ってみる必要があるのです．ただし，弧長パラメーターを使わなくとも，曲率を表すことは可能です．教科書 p.12 を参考にしてください．

問．曲率はスカラー関数とのことですが，どういう意味ですか？スカラーは定数のことではなかったですか？

答．スカラー関数とは，単に実数値関数の意味です．ベクトル値関数ではないよ，ということを強調するために使いました．あまり気にしないでください．曲率  $\kappa$  は，パラメーター  $s$  を固定することにスカラーになるわけですが，それは， $s$  に依存して変化するので， $\kappa(s)$  と書きました．

問．曲率から曲線を定義できますか？

答．平面曲線の始点と，初速度の方向を指定すれば，曲率から曲線を再構成できます．教科書の pp.9-10 を見てください．

問．不変というのはどういう意味ですか？曲率は，平面曲線の不変量とのことですが，どういう意味ですか？

答．曲率が不変であるといったのは，曲率が定数であるという意味ではありません．それぞれの曲線に，それぞれの曲率がさだまるわけですが，曲線を平行移動しても，移動してできた曲線の曲率は，もとの曲線の曲率と等しい，すなわち，平行移動に関して，曲線の曲率は変わらない，不変である，そういうダイナミックな意味で言っています．“不変量”という言葉は，常にそういう意味あいで使います．考える対象があって，そこに同値関係が定まっている場合，各同値類で一定となる量を不変量というわけです．他に不変量とよぶべきものを知っていますか？

問．曲率は実数全体の値をとりうるのですか？曲率は0もとれるでしょうか？曲率は負の値をとるものですか？

答．そうです．いろいろな平面曲線の曲率を調べてみてください．

問．“frame” はどういうものですか？

答．ベクトル空間の基底 (basis) という概念は知っていると思います．いま，ベクトル空間を，1つではなく，たくさん考える場合，いいかえると，パラメーターに依存したベクトル空間の族 (family) がある場合，その基底をいっせいに選んだもの，それは基底の族ですが，それを frame と呼びます．幾何学では非常に有用な概念です．講義で出てきた  $e_1(s), e_2(s)$  は，パラメーター  $s$  に依存した基底なので，frame であるというわけです．frame の和訳は標構です．

問． $e_1$  に対し  $e_2$  を定義する時になぜ平面曲線の内側を向くようにするのですか？

答．内側を向くように取るのではなく，曲線の形にかかわらず， $e_1$  を反時計まわりに  $90^\circ$  回転したものを  $e_2$  にとります．

問．すべての  $t$  について  $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \neq (0, 0)$  という仮定はどこで必要ですか？

答． $\frac{ds}{dt}$  が正になるための条件です．

問．狭義単調増加と強増加 ( $a_1 < a_2$  ならば  $f(a_1) < f(a_2)$ ) の使いわけはありますか？

答．講義で安易に，“狭義単調増加”という言葉を使ってしまいました．ようするに  $\frac{ds}{dt} > 0$  ということを言いたかっただけです．ふつう狭義単調増加を，上の意味の強増加の意味で使うことも多いので，誤解をまねきますね．撤回します．

問．曲線に特異点がある場合（つまり速度ベクトルが零ベクトルにはならないという仮定がみたされない場合）に，曲率は定義できないのですか？また， $C^\infty$  でない場合，微分可能でない場合はどうですか？

答．これは深い質問ですね．ふつうは，特異点以外の部分で，曲率を考えて，点の特異点などに近づいたときに，曲率が収束するか，発散するかなどを研究するようです．また，曲率の定義では，2階微分までしか使っていないので，曲線が  $C^2$  級であれば（特異点以外で）曲率は定義できます．

問．平面曲線の特異点の定義は何ですか？

答．平面曲線  $\mathbf{p}(t)$  が  $t = t_0$  で特異点をもつとは， $\dot{\mathbf{p}}(t_0)$  が零ベクトルであるときにいいます．

問．曲線と直線の相違点は？点は曲線ですか？

答．ここでは，直線は，曲線の仲間に入れます．点も，曲線の仲間に入れます．ただし，点は，定値写像でパラメータづけられるので，その速度ベクトルは零ベクトルとなって，曲率を定義するときの仮定は満たしていません．

問．曲率の定義を厳密にしてください．

答．教科書 p.6 を見てください．

問．2つの曲線が，平行移動と回転移動でうつるということと，合同ということは，どう違うのですか？

答．合同という場合は，反転（裏返し）も含まれますね．そこが違います．反転すると，曲率にマイナスがつきます．

問．“一般に”成り立つということは，例外的に成り立たないこともあるという意味ですか？

答．ここでは，特殊な状況に限らず，常に成り立つという意味で使っています．ちなみに，「一般化」という大切な概念があります．確かに「一般の位置」というような使い方には，質問にあるような意味あいがありますが，これは数学では“例外的な”言葉の使い方であると言ってよいと思います．

問． $\frac{ds}{dt} = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$  となっていますが，少しおかしいと思います．

答．たぶん， $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$  の写し間違いでしょう．

問．複素平面上の曲線についても同じように扱えるのでしょうか？

答．扱えます．ただし，複素平面には，いわゆる複素構造があるので，通常，表記の仕方が違ってきます．関数論での表記を参考にしてください．

問．微分の記号  $\dot{\mathbf{p}}$  と  $\mathbf{p}'$  はどう区別しているのですか？

答．この講義では，単に教科書に従い， $t$  微分と  $s$  微分を区別するために使っています．ちなみに，ドット・はニュートン流，プライム' はライプニッツ流とか．

問．1つの平面曲線のパラメータをつけかえたものも，同じ曲線とみなすのですか？平面上の図形として同じものは，パラメータ表示が異なっても同じものとみなされるのですか？

答．そうです．ただし，パラメータの付け替えは，曲線の向きを保つもの，つまり， $\frac{ds}{dt} > 0$  となるようなパラメータの変換だけを考えます．ですから，向きのついた曲線というべきかもしれません．また，平面上の（恒等写像ではない）平行移動や回転などで移してできる曲線は，もはや異なる曲線であるとみなします．それがわれわれの立場です．

問． $(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1)' = 2x'x'' + 2y'y'' = 2\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1'$  のところがわかりません．

答． $\mathbf{e}_1 = (x', y')$ ,  $\mathbf{e}_1' = (x'', y'')$  に注意して考えてください．

問． $\|\dot{\mathbf{p}}\|$  と  $|\dot{\mathbf{p}}|$  はどういう違いがあるのですか？

答．違いはありません．両方ともベクトルの長さの記号です．私（石川）は，普通の絶対値と区別するため，2本棒を使います．

問． $\|\dot{\mathbf{p}}(t)\|$  と  $\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt}$  の違いは？

答．左は非負の実数，右はベクトルです．

問．合成関数の微分の  $\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$  の  $\cdot$  は，ただのかけ算ですか？

答．そうです．内積も同じ記号を使いますが，文脈から推測してください．

問．なぜ， $(a \cos \frac{s}{a})' = -a \sin \frac{s}{a}$  とならないのですか？

答． $s$  に関する微分であることに注意してください．

問．曲線の次元は1次元ですか2次元ですか？

答．次元というのはいろいろな状況で使われる言葉なので，その意味するところに注意する必要があります．たぶん，ベクトル空間の次元は知っていると思いますが，それをそのまま曲線にあてはめるのは無理です．ここは安易に答えないでおきましょう．

問．テストをした方が，学力向上に役に立つのではないですか？

答．たしかに，与えられた問題を的確に決められた時間内に解決する能力は大切です．しかし，疑問をもつこと，自分で問題を見つけることも，劣らず大切と考えます．そして，問題意識を軸に，知識を系統立てて身につけることができれば，問題解決能力は，おのずと身につくのではないかと考えるわけです．そういう観点から，今回のような評価方法を採用しました．