レポート解説 基礎数学B (旧課程：数学序論 2，数学序論 G，数学序論 11 など)

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２００８年度後期)

No. 9 (西暦２００８年１２月１６日 (火) 出題，１２月２２日 (月) **午後１時**締めきり)

9-1

$(X,\mathcal{U}_X),(Y,\mathcal{U}_Y)$ を位相空間とする．次の問いに答えよ．
(1) 直積 $X\times Y$ 上の直積位相 $\mathcal{U}_{X\times Y}$ を生成するような $\mathcal{O}\subset\mathcal{P}(X\times Y)$ を 1 つ与えよ．
(2) $p_1:X\times Y\to X$ および $p_2:X\times Y\to Y$ を $p_1(x,y)=x$ および $p_2(x,y)=y$ で定義する．写像 p_1 と p_2 が連続となるような $X\times Y$ 上の最弱位相を $\mathcal{U}'_{X\times Y}$ とするとき，$\mathcal{U}'_{X\times Y}$ は，

$$\mathcal{O}'=\{p_1^{-1}(U)\mid U\in\mathcal{U}_X\}\cup\{p_2^{-1}(V)\mid V\in\mathcal{U}_Y\}$$

で生成される位相である．さて，このとき，$\mathcal{U}_{X\times Y}=\mathcal{U}'_{X\times Y}$ が成り立つことを示せ．(5+15)

9-2

$(X,\mathcal{U})$ を位相空間とし，X 上に同値関係 $\sim$ が与えられているとする．このとき商集合 $X/\sim$ の上の商位相 $\mathcal{U}'\subset\mathcal{P}(X/\sim)$ を

$$U\in\mathcal{U}'\quad\Longleftrightarrow\quad\pi^{-1}(U)\in\mathcal{U}$$

で定義する．ただし，$\pi:X\to X/\sim$ を自然は射影とする．このとき，次の問いに答えよ．
(1) 写像 π の定義をのべ，さらに $A\subset X/\sim$ に対して，$\pi^{-1}(A)\subset X$ がどんな集合になるか定義にしたがって説明せよ．
(2) $\mathcal{U}'$ が $X/\sim$ 上の位相となることを示せ．(10+10)

問題 9-1 は直積位相，**問題 9-2** は商位相の基礎的な問題でした．基礎的な問題なので，１つ１つの用語・概念を完全に理解していないと解くことができない，という意味で難しい問題だったようです．教科書をよく読んで，自分の言葉で理解して，高校生にも説明できるように充分に理解しておいてください．

問題 9-1 の解答例． (1) $\mathcal{O}=\{U\times V\mid U\in\mathcal{U}_X,V\in\mathcal{U}_Y\}$．
(2) まず，$\mathcal{U}_{X\times Y}\subset\mathcal{U}'_{X\times Y}$ を示す．そのために，$\mathcal{O}\subset\mathcal{U}'_{X\times Y}$ を示す．任意の $U\times V\in\mathcal{O}$ をとると，$U\times V=(U\times Y)\cap(X\times V)=p_1^{-1}(U)\cap p_2^{-1}(V)\in\mathcal{U}'_{X\times Y}$ であるから，$\mathcal{O}\subset\mathcal{U}'_{X\times Y}$ となる．$\mathcal{U}_{X\times Y}$ は $\mathcal{O}$ を含む最弱位相だから $\mathcal{U}_{X\times Y}\subset\mathcal{U}'_{X\times Y}$ である．次に，$\mathcal{U}'_{X\times Y}\subset\mathcal{U}_{X\times Y}$ を示す．そのために，$\mathcal{O}'\subset\mathcal{U}_{X\times Y}$ を示す．$\mathcal{O}'$ の任意の元は，ある $U\in\mathcal{U}_X$ について $p_1^{-1}(U)=U\times Y$ または，ある $V\in\mathcal{U}_Y$ について $p_2^{-1}(V)=X\times V$ であり，いずれにしろ $\mathcal{O}$ に属する．したがって，$\mathcal{O}'\subset\mathcal{O}\subset\mathcal{U}_{X\times Y}$ である．$\mathcal{U}'_{X\times Y}$ は $\mathcal{O}'$ を含む最弱位相だから $\mathcal{U}'_{X\times Y}\subset\mathcal{U}_{X\times Y}$ となる．したがって，$\mathcal{U}_{X\times Y}=\mathcal{U}'_{X\times Y}$ となる．

問題 9-1 の補足解説． 開集合系や位相の定義で,「$\mathcal{U}$ は X 上に位相を定める」という表現が教科書にありますが (p.73 参照)，これは「$\mathcal{O}$ は X 上に位相を生成する」(p.76 参照) という概念と混同しやすいので,「$\mathcal{U}$ は X 上の位相である」と言い切った方がよいです．講義では，それらを明確に区別して説明しました．なお，上の解答例で，$\mathcal{O}$ 自体は位相ではありません（開集合系の条件を満たしません）．また，$\mathcal{O}'$ も位相ではありません．$\mathcal{O}\supset\mathcal{O}'$ ですが，$\mathcal{O}\neq\mathcal{O}'$ です．($\mathcal{O}$ は $\mathcal{U}_X\times\mathcal{U}_Y$ とは書けません）．

問題 9-2 の解答例． (1) x を含む同値類を $[x]$ と書くとき，$\pi(x)=[x]$ により，写像 π が定義される．さらに $A\subset X/\sim$ に対して，$\pi^{-1}(A)=\{x\in X\mid\pi(x)\in A\}=\{x\in X\mid[x]\in A\}=\cup_{[x]\in A}[x]$ は，同値類が A に属するような A の要素の集まりである．
(2) まず，$\pi^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in\mathcal{U}$ であるから，$\emptyset\in\mathcal{U}'$ である．さらに，$\pi^{-1}(X/\sim)=X\in\mathcal{U}$ であるから，$X/\sim\in\mathcal{U}'$ である．
また，$U,V\in\mathcal{U}'$ とすると，$\pi^{-1}(U)\in\mathcal{U}$ かつ $\pi^{-1}(V)\in\mathcal{U}$ であるから，$\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(V)\in\mathcal{U}$ である．ところで，$\pi^{-1}(U\cap V)=\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(V)$ であるから，$U\cap V\in\mathcal{U}'$ である．
最後に，$U_\lambda\in\mathcal{U}'$, $(\lambda\in\Lambda)$ とすると，$\pi^{-1}(U_\lambda)\in\mathcal{U}'$ であるが，$\pi^{-1}(\cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda)=\cup_{\lambda\in\Lambda}\pi^{-1}(U_\lambda)$ なので，$\cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\in\mathcal{U}'$ となる．以上により，$\mathcal{U}'$ が $X/\sim$ 上の位相となることが示された．

問題 9-2 の補足解説． 「写像」の定義 (p.11),「逆像」の定義 (p.12) を復習してください．高校生にも説明できるように，自分の言葉で充分に理解しておいてください．ではよろしく．
数学の基本「論理をもとに，集合と写像の理論を駆使して，四苦八苦，位相を学ぶといいそうだ」

以上．