

レポート解説 基礎数学B (旧課程：数学序論2, 数学序論G, 数学序論11など)

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦2008年度後期)

No. 8 (西暦2008年12月12日(金) 出題, 12月18日(木) 午後1時締めきり)

8-1

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ を有理数全体の集合とする. このとき, \mathbb{R} の通常の位相 (Euclid 位相) について, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ および $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ を示せ. (5+5)

8-2

$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ に \mathbb{R}^2 から相対位相を入れる. このとき, $-\pi \leq a < b \leq \pi$ について, $U = \{(\cos \theta, \sin \theta) \mid a < \theta < b\}$ を図示し, U が S^1 の開集合であることを示せ. (10)

8-3

$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ に \mathbb{R}^3 からの相対位相を入れる. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $F = \{(0, 0, 1)\}$ が S^2 の閉集合であることを示せ.

(2) $U = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$ を図示し, U が S^2 の開集合であることを示せ. (5+10)

問題 8-1 は, \mathbb{R} の中で, 有理数全体 \mathbb{Q} および無理数全体 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ がともに稠密であるという事実に関する問題であるが, 出題のねらいは, その事実そのものというよりは, その事実を使って, 位相の一般論や用語の定義に基づいて論理的に説明できるかどうか, という点にある. なお, \mathbb{Q} の \mathbb{R} における稠密性の厳密な導き方 (の1つ) は, 教科書 pp.150–151 にある. また, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ の \mathbb{R} における稠密性 (\mathbb{Q} が内点をもたないこと) は, \mathbb{Q} の濃度が連続濃度にはならないことから示すことができる. (他にもいろいろな方法がある).

問題 8-1 の解答例. まず $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ を示す. 任意の $x \in \mathbb{R}$ が $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ の触点であることを示せばよい. $x \in \mathbb{R}$ とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $x' \in \mathbb{Q}$ が存在して, $|x - x'| < \varepsilon$ となる. したがって, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ である. よって, x は \mathbb{Q} の触点である. したがって, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ である.

つぎに $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ を示す. 任意の $x \in \mathbb{Q}$ が \mathbb{Q} の内点でないことを示せばよい. $x \in \mathbb{Q}$ とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ は \mathbb{Q} に含まれない. よって, x は \mathbb{Q} の内点でない. したがって, $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ である.

問題 8-2, 問題 8-3 は, 相対位相の問題である. 相対位相の定義を理解できているかどうかのポイントである. 以下に書いた解答例はほんの一例にすぎない.

問題 8-2 の解答例. (図は省略. 単位円上の偏角が a から b までの円弧). U が S^1 の開集合であることを示すためには, \mathbb{R}^2 の開集合 U' で $U' \cap S^1 = U$ となるものが存在することを示せばよい. 2点 $(\cos a, \sin a)$ と $(\cos b, \sin b)$ が相異なる場合は, その2点を通る直線 L を考える. また, 2点 $(\cos a, \sin a)$ と $(\cos b, \sin b)$ が一致する場合は, $a = -\pi, b = \pi$ であり, この場合は, $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -1\}$ とおく. L を \mathbb{R}^2 から除いて得られる半平面のうち, 考えている円弧 U を含む方を U' とおく. すると, U' は \mathbb{R}^2 の開集合であり, $U = U' \cap S^1$ となる. したがって, $U \subset S^1$ は相対位相に関して S^1 の開集合である.

問題 8-3 の解答例. (1) $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 1\}$ とおくと, V が \mathbb{R}^3 の開集合であり, $V \cap S^2 = S^2 \setminus F$ は S^2 の開集合である. したがって, F は S^2 の閉集合である.

(2) (図は省略. 球面の8分の1である.) $U' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$ は \mathbb{R}^3 の開集合であり, $U = U' \cap S^2$ である. したがって, U は S^2 の開集合である.

以上.