レポート解説 基礎数学B (旧課程：数学序論 2，数学序論 G，数学序論 11)

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２００８年度後期)

No. 7 (西暦２００８年１１月２８日 (金) 出題，１２月４日 (木) **午後１時**締めきり)

7-1

３つの要素からなる集合 $X = \{0, 1, 2\}$ 上の位相をすべて求め，それらの位相たちの包含関係について調べよ．(15)

7-2

Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ に対し，$\mathcal{V} = \{U(x, r) \mid x \in \mathbf{Q}^n, r$ は正の有理数$\}$ が開集合系の基になることを確かめよ．（ただし，$U(x, r)$ は $\mathbf{R}^n$ における x の r-開近傍であり，$\mathbf{Q}$ は有理数全体の集合を表す．）(15)

7-3

任意の距離空間 X が第 1 可算公理を満たすことを示せ．(10)

問題 7-1 は骨のある問題でしたね．つまり，解くのに骨が折れる問題でしたが，意外に多くの人が解いてくれたのは嬉しい限りです．皆さんの解答の方が優れていると思いますが，参考までに，コンパクトな解答の一例を書いてみます．一方，**問題 7-2, 問題 7-3** は標準的な問題ですが，用語の定義を正確に理解していないと解けない問題です．

問題 7-1 の解答例：

X 上の位相は，合計 29 個（種類）ある．それらを分類して記述する．$\mathcal{U}_{\mathrm{trivial}} = \{\emptyset, X\}$ が 1 個．$\mathcal{U}_i = \{\emptyset, \{i\}, X\}$, $i \in X$, が 3 個，$\mathcal{V}_k = \{\emptyset, X \setminus \{k\}, X\}$, $k \in X$, が 3 個，$\mathcal{U}_{i,k} = \{\emptyset, \{i\}, X \setminus \{k\}, X\}$, $i, k \in X$, が 9 個，$\mathcal{W}_i = \{\emptyset, \{i\}, \{i, j\}, \{i, k\}, X\}$, ただし $\{i, j, k\} = X$, が 3 個，$\mathcal{X}_k = \{\emptyset, \{i\}, \{j\}, \{i, j\}, X\}$, ただし $\{i, j, k\} = X$, が 3 個，$\mathcal{Y}_{i,j} = \{\emptyset, \{i\}, \{j\}, \{i, j\}, \{i, k\}, X\}$, ただし $\{i, j, k\} = X$, が 6 個，$\mathcal{U}_{\mathrm{discrete}} = \mathcal{P}(X)$ (X のべき集合) が 1 個, であり，これらはすべて相異なる位相であり，２９種類ある．これらの包含関係は次で与えられる：

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathcal{U}_{\mathrm{trivial}} & \subset & \mathcal{U}_i & \subset & \mathcal{U}_{i,k} & \subset & \mathcal{W}_i & \subset & \mathcal{Y}_{i,j} & \subset & \mathcal{U}_{\mathrm{discrete}} \\ \| & & & & \| & & & & \| & & \| \\ \mathcal{U}_{\mathrm{trivial}} & \subset & \mathcal{V}_k & \subset & \mathcal{U}_{i,k} & \subset & \mathcal{X}_k & \subset & \mathcal{Y}_{i,j} & \subset & \mathcal{U}_{\mathrm{discrete}} \end{array}$$

ただし，包含関係 $\mathcal{X}_k \subset \mathcal{Y}_{i,j}$ が生じるのは $\{i, j, k\} = X$ の場合に限る．

問題 7-2 の解答例：

任意の開集合 $U \subset \mathbf{R}^n$ をとる．任意の $x \in U$ に対して，$\varepsilon > 0$ が存在して，$U(x, \varepsilon) \subset U$ となる．このとき，$y \in \mathbf{Q}^n$ があって，$\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$ となる．いま，$s > 0$ を $\|x - y\| < s < \frac{\varepsilon}{2}$ となるように選べば，$x \in U(y, s) \subset U(x, \varepsilon)$ となる．実際，$\|x - y\| < s$ であるから，$x \in U(y, s)$ である．また，$z \in U(y, s)$ ととると，$\|z - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$ であるから，$\|z - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| < \varepsilon$ となり，$z \in U(x, \varepsilon)$ であるから，$U(y, s) \subset U(x, \varepsilon)$ である．以上から，U は $\mathcal{V}$ の要素たちの和集合とした表される．よって，$\mathcal{V}$ は開集合系の基である．

問題 7-3 の解答例：

$x \in X$ とする．x の任意の近傍 A をとる．すると，$\varepsilon > 0$ が存在して，$x \in U(x, \varepsilon) \subset A$ となる．自然数 n を十分大きくとれば $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ となるので，$x \in U(x, \frac{1}{n}) \subset U(x, \varepsilon) \subset A$ となる．したがって $\{U(x, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbf{N}\}$ は x の基本近傍系となる．$\{U(x, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbf{N}\}$ は可算集合であるから，X が第一可算公理をみたすことがわかる．

以上．