レポート解説 基礎数学B (旧課程：数学序論 2，数学序論 G，数学序論 11)

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２００８年度後期)

No. 6 (西暦２００８年１１月７日 (金) 出題，１１月１３日 (木) **午後１時**締めきり)

6-1

$\mathbf{R}^2$ の次の部分集合 A を図示し，それが $\mathbf{R}^2$ の開集合であるかないかを判定せよ.（それぞれ答えだけでよい.）

(6-1-1) $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1$ かつ $x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 < 0\}$.

(6-1-2) $A = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} U(\mathbf{0}, \frac{1}{n})$.

(6-1-3) $A = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} B(\mathbf{0}, 1 - \frac{1}{n})$.

ただし，$\mathbf{0} = (0,0), U(\mathbf{0}, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < r\}, B(\mathbf{0}, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq r\}$ である.

6-2

$\mathbf{R}$ の開区間 (a, b) が $\mathbf{R}$ の開集合であることを，定義にしたがって証明せよ.

6-3

$\mathbf{R}^n$ の部分集合 A_1, A_2 について，$(A_1 \cup A_2)^\circ \supset A_1^\circ \cup A_2^\circ$ を示せ．また，等号が成り立たないような $\mathbf{R}$ の部分集合 A_1, A_2 を具体的に挙げて説明せよ.

問題 6-1 の略解：

図は省略.

(6-1-1) は開集合である.

(6-1-2) $A = \{(0,0)\}$，開集合でない.

(6-1-3) $A = U((0,0), 1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$，開集合である.

問題 6-2 は，定義通りに証明をできるだけ詳しく書くことができるか，というのが出題意図でした．説明不足の場合は減点しました.

問題 6-2 の解答例：

任意の $x \in (a, b)$ をとる．$a < x < b$ である．$\varepsilon = \min\{x - a, b - x\}$ とおくと，$\varepsilon > 0$ であり，$U(x, \varepsilon) \subset (a, b)$ となる．実際，$y \in U(x, \varepsilon)$ とすると，$|y - x| < \varepsilon$ であるから，$a < x - \varepsilon < y < x + \varepsilon < b$ から，$y \in (a, b)$ がわかる．したがって，(a, b) は $\mathbf{R}$ の開集合である.

問題 6-3 の解答例：

前半：$A_1^\circ \cup A_2^\circ$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合で，$A_1 \cup A_2$ に含まれるので，集合の内部の特徴付けから，$A_1^\circ \cup A_2^\circ \subset (A_1 \cup A_2)^\circ$ が成り立つ.

前半の別解：$x \in A_1^\circ \cup A_2^\circ$ とする．$x \in A_1^\circ$ の場合，$\varepsilon > 0$ が存在して，$U(x, \varepsilon) \subset A_1$ となり，したがって，$U(x, \varepsilon) \subset A_1 \cup A_2$ を得る．$x \in A_2^\circ$ の場合も，$\varepsilon' > 0$ が存在して，$U(x, \varepsilon') \subset A_2$ となり，したがって，$U(x, \varepsilon') \subset A_1 \cup A_2$ を得る．よって，任意の $x \in A_1^\circ \cup A_2^\circ$ に対して，$\varepsilon > 0$ が存在して，$U(x, \varepsilon) \subset A_1 \cup A_2$ が成り立つ．したがって，$x \in (A_1 \cup A_2)^\circ$ を得る．よって，$A_1^\circ \cup A_2^\circ \subset (A_1 \cup A_2)^\circ$ が成り立つ.

後半：たとえば，$A_1 = (-1, 0), A_2 = [0, 1)$ とすると，$A_1^\circ = (-1, 0), A_2^\circ = (0, 1)$ より，$A_1^\circ \cup A_2^\circ = (-1, 0) \cup (0, 1)$ であるが，$A_1 \cup A_2 = (-1, 1)$ なので，$(A_1 \cup A_2)^\circ = (-1, 1) \neq (-1, 0) \cup (0, 1)$ となる．したがって，この例では，$A_1^\circ \cup A_2^\circ \neq (A_1 \cup A_2)^\circ$ となる.

以上.