レポート解説 基礎数学B (旧課程：数学序論2，数学序論G，数学序論11)

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２００８年度後期)

No. 5 (西暦２００８年１０月３１日 (金) 出題，１１月６日 (木) **午後１時**締めきり)

5-1

$\mathbf{R}$ に通常の順序を入れるとき，次の部分集合 $A \subset \mathbf{R}$ について，最大元，最小元，上界全体の集合，上限，下界全体の集合，下限をそれぞれ求めよ．また存在しない場合は，存在しないと記せ．(答えだけでよい．ただし，この問題は，あくまで $\mathbf{R}$ 内で考え，∞ 等の記号は（無限区間の表示以外には）使わないこととする．)
(1) $A = [-1, 2)$.　(2) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\}$.　(3) $A = \mathbf{N}$.

5-2

$X = \{(m, n) \mid n \in \mathbf{N}, m = 0, 1\}$ に次の順序関係を入れる：$(m, n) \le (m', n') \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} m < m'$ または $(m = m'$ かつ $n \le n')$．このとき，$(X, \le)$ が整列順序集合であることを示せ．

5-3

集合 X, Y に対し，X から Y への写像全体の集合を Y^X と表す．A, B, C を集合とする．任意の写像 $f : B \times C \to A$ に対して，写像 $\tilde{f} : C \to A^B$ を $\tilde{f}(c)(b) = f(b, c)(b \in B, c \in C)$ により定義する．このとき，対応 $f \mapsto \tilde{f}$ は $A^{B\times C}$ と $(A^B)^C$ の間の全単射を定めることを確かめよ．
（ヒント：$\tilde{f}(c) : B \to A$ に注意．$\Phi : A^{B\times C} \to (A^B)^C$ を $f \in A^{B\times C}$ に対して $\Phi(f) = \tilde{f} \in (A^B)^C$ で定め，写像 Φ が単射かつ全射であることを確かめる.）

問題 5-1 は皆さんほぼできていました．ただし，$\mathbf{N}$ の $\mathbf{R}$ における上界全体の集合が “存在しない” と書いている人が多数いました．それは間違いで，正確には，$\emptyset$（空集合）が答になります．上界は存在しなくても，上界全体の集合は存在するわけです.（解答は省略）.

問題 5-2 は授業で説明した例題の類題です．できなかった人は，講義ノートをもう一度見直しておいてください．問題文の X を図示して，その部分集合をいろいろ想定して，その最小元はどこになるか考えてみてから，もう一度証明を書いてみるとよいと思います.（証明は省略）.

問題 5-3 は，とにかく写像というものの定義通りに素直に考えられるかどうか，という問題です．

問題 5-3 の略解:

$\Phi : A^{B\times C} \to (A^B)^C$ を $f \in A^{B\times C}$ に対して $\Phi(f) = \tilde{f} \in (A^B)^C$ で定める.（つまり，任意の $b \in B, c \in C$ に対して，$\Phi(f)(c)(b) = f(b.c)$ とおく.）このとき，写像 Φ が全単射であることを示す．

Φ の単射性: $f, f' \in A^{B\times C}$ について，$\Phi(f) = \Phi(f')$ とする.（これは $\Phi(f) = \Phi(f') : C \to A^B$ ということ，つまり，C から A^B への写像として等しいということだから）任意の $c \in C$ に対して，$\Phi(f)(c) = \Phi(f')(c)$（これは $\Phi(f)(c) = \Phi(f')(c) : B \to A$ ということ，つまり，B から A への写像として等しいということだから）任意の $b \in B$ に対して，$\Phi(f)(c)(b) = \Phi(f')(c)(b)$ が成り立つ．いま，$\Phi(f)(c)(b) = f(b, c), \Phi(f')(c)(b) = f'(b, c)$ であるから，任意の $(b, c) \in B \times C$ について，$f(b, c) = f'(b, c)$ が成り立つ．したがって，$f = f' : B \times C \to A$ が成り立つ．よって Φ は単射である．

Φ の全射性: 任意に $g \in (A^B)^C$ をとる．$g : C \to A^B$ であるから，$c \in C$ に対して，$g(c) \in A^B$ つまり，$g(c) : B \to A$ であるので，$b \in B$ に対して，$g(c)(b) \in A$ である．そこで，$f : B \times C \to A$ を $(b, c) \in B \times C$ について，$f(b, c) = g(c)(b)$ により定める．すると，この f について $\Phi(f)(c)(b) = g(c)(b)$ が任意の $b \in B, c \in C$ に対して成り立つ．したがって，任意の $c \in C$ について $\Phi(f)(c) = g(c) \in A^B$ が成り立つ．よって，$\Phi(f) = g : C \to A^B$ が成り立つ.（つまり，$\Phi(f) = g \in (A^B)^C$．したがって，Φ は全射である．

以上．