レポート**解説** 基礎数学B (旧課程：数学序論2，数学序論G)

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２００８年度後期)

No. 4 (西暦２００８年１０月２１日 (火) 出題，１０月２７日 (月) **午後１時**締めきり)

4-1

A, B, C を集合とし，$f : A \to B, g : B \to C$ を写像とするとき，次の問に答えよ：
(4-1-1) f と g が共に単射ならば $g \circ f : A \to C$ も単射であることを示せ．
(4-1-2) f と g が共に全射ならば $g \circ f : A \to C$ も全射であることを示せ．
(4-1-3) $g \circ f : A \to C$ が単射ならば，f が単射であることを示せ．
(4-1-4) $g \circ f : A \to C$ が全射ならば，g が全射であることを示せ．

4-2

A, B を集合とし，$f : A \to B$ が与えられたとき，A における関係 $\sim$ を
$a, b \in A$ について，$a \sim b \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} f(a) = f(b)$ で定める．このとき，次の問に答えよ：
(4-2-1) $\sim$ が同値関係であることを確かめよ．
(4-2-2) 商集合 $A/\sim$ から像 $f(A)$ への全単射を f を用いて与え，それが全単射であることを説明せよ．

4-3

n 以下の自然数全体の集合 $Z_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ のべき集合 $\mathcal{P}(Z_n)$ の濃度 (個数) $|\mathcal{P}(Z_n)| = \#(\mathcal{P}(Z_n))$ を求め，説明せよ．

4-4

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, \}$ を自然数の全体の集合とする．このとき，$\mathbf{N}$ から $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ への全単射を具体的に与えて説明せよ．

問題 4-1 は皆さんよくできていたので，解説は省略します．

問題 4-2-1 もできていましたが，**問題 4-2-2** は，なかなか説明しづらい問題だったようでした．

問題 4-2-2 の解答例：

$a \in A$ の同値類を $[a]$ で表すことにする．$[a] \in A/\sim$ である．[もちろん，記号 $R(a)$ を使っても同じである．]

さて，写像 $\tilde{f} : A/\sim \to f(A)$ を，任意の $x \in A/\sim$ に $x = [a]$ となる $a \in A$ （つまり，x の代表元）を 1 つ選び，$\tilde{f}(x) = f(a)$ で定義する．[x は $A/\sim$ の要素だから，A の同値関係 $\sim$ に関する或る同値類であることに注意する．]

まず，$\tilde{f}$ **が写像になっていること**を確かめる．[任意に $x \in A/\sim$ を与えたとき，$\tilde{f}(x)$ が 1 つに定まっていること，いわゆる「well-defined」であることを示す．]

仮に $x = [b], b \in A$ とも表されたとする．このとき，$[a] = [b]$ であるから，$a \sim b$ が成り立つ．つまり，$f(a) = f(b)$ が成り立つ．したがって，$\tilde{f}(x)$ は代表元のとりかたに依らずに 1 つに定まる．したがって，$\tilde{f}$ は写像である．

$\tilde{f}$ **が単射であること**：$x, x' \in A/\sim$ について，$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x')$ と仮定する．いま，$a, a' \in A$ があって $x = [a], x' = [a']$ となっているが，仮定から $f(a) = f(a')$ である．$\sim$ の定義から $a \sim a'$ である．したがって，$x = x'$ である．よって，$\tilde{f}$ は単射である．

$\tilde{f}$ **が全射であること**：任意に $b \in f(A)$ をとる．ある $a \in A$ が存在して，$b = f(a)$ である．このとき，$\tilde{f}$ の定義から $\tilde{f}([a]) = f(a) = b$ である．したがって，$\tilde{f}$ は全射である．

以上により，$\tilde{f} : A/\sim \to f(A)$ は全単射であることが確かめられた．

問題 4-3 も皆さんだいたいできていたので，解説は省略します．

問題 4-4 は説明の仕方がいろいろあると思いますが，図を援用したり，式を使ったり，皆さんよく工夫していました．わからなかったら，たとえば，教科書の pp. 36–37 に書いてあることを参考にしてください．

以上．