レポート**解説** 基礎数学B (旧課程：数学序論２，数学序論G)

担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお) (西暦２００８年度後期)

No. 3 (西暦２００８年１０月１４日(火) 出題，１０月２０日(月) 正午締めきり)

3-1

$\alpha \in [0, \pi)$ に対して，$L_\alpha = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (\cos\alpha)y = (\sin\alpha)x\}$ とおくとき，次を示せ．

(1) $\bigcup_{\alpha\in[0,\pi)} L_\alpha = \mathbf{R}^2$. (2) $\bigcap_{\alpha\in[0,\pi)} L_\alpha = \{(0, 0)\}$.

3-2

集合 A におけるある同値関係 $\sim$ が与えられたとき $R(a) = \{b \in A \mid a \sim b\}$ とおく．このとき，$a, b \in A$ について，$a \sim b \Longleftrightarrow R(a) = R(b)$ を示せ．

3-3

V をベクトル空間，$W \subset V$ を部分ベクトル空間とする．このとき V における関係 $\sim$ を，$u, v \in V$ に対して $u \sim v \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} u - v \in W$ で定める．このとき，$\sim$ が V における同値関係であることを示せ．

問題 3-1 は集合族の和と共通部分の問題です．図形的な直感を援用した説明でもよいですが，ここでは，**論理性を重んじた解答例**を記してみます：

問題 3-1 の解答例: (1) 各 $\alpha \in [0, \pi)$ について $L_\alpha \subset \mathbf{R}^2$ なので，$\bigcup_{\alpha\in[0,\pi)} L_\alpha \subset \mathbf{R}^2$ は明らか．逆に $\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2$ を任意にとる．$(x, y) = (0, 0)$ ならば $\forall a \in [0, \pi)$ に対して，$(0, 0) \in L_\alpha$ なので，$(0, 0) \in \bigcup_{\alpha\in[0,\pi)} L_\alpha$．$(x, y) \neq (0, 0)$ とすると，$\exists\alpha \in [0, \pi), \cos\alpha = x/\sqrt{x^2 + y^2}, \sin\alpha = y/\sqrt{x^2 + y^2}$ となる．この α に対して，$(x, y) \in L_\alpha$ なので，$(x, y) \in \bigcup_{\alpha\in[0,\pi)} L_\alpha$．したがって，$\mathbf{R}^2 \subset \bigcup_{\alpha\in[0,\pi)} L_\alpha$. 以上より，$\bigcup_{\alpha\in[0,\pi)} L_\alpha = \mathbf{R}^2$.

(2) $\forall a \in [0, \pi)$ に対して，$(0, 0) \in L_\alpha$ であるから，$\{(0, 0)\} \subset \bigcap_{\alpha\in[0,\pi)} L_\alpha$ は成り立つ．逆に，$(x, y) \in \bigcap_{\alpha\in[0,\pi)} L_\alpha$ を任意にとる．$(x, y) \in L_0 \cap L_{\frac{\pi}{2}}$ であり，$L_0 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 0\}$，$L_{\frac{\pi}{2}} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 0\}$ であるから，$(x, y) = (0, 0)$ を得る．したがって，$\bigcap_{\alpha\in[0,\pi)} L_\alpha \subset \{(0, 0)\}$ であり，$\bigcap_{\alpha\in[0,\pi)} L_\alpha = \{(0, 0)\}$ を得る．

問題 3-2 は同値関係と同値類の問題です．問題文に同値類の定義 $R(a) = \{b \in A \mid a \sim b\}$ を書いたので，混乱しているレポートが多くありました．この定義の中の記号 b は，条件をみたすものの代名詞として使っているだけの飾り，いわば「ダミー」の記号です．a は与えられていますが，b の方は，$R(a) = \{b \in A \mid a \sim b\} = \{c \in A \mid a \sim c\}$ という具合にまとめて別の記号（ただし，a は除く）に変えられるのです．たとえば，$\mathbf{R}$ は $\{x \mid x$ は実数$\}$ とも書けるし，$\{y \mid y$ は実数$\}$ とも書けるし，$\{z \mid z$ は実数$\}$ とも書ける，といった具合です．この事情は，集合の記号だけでなく，和の記号のときも同じで，たとえば，$\sum_{i=1}^n i = \sum_{j=1}^n j = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ となります．ダミーの記号は i でも j でも k でも同じことなのです（ただし，この場合，i の代わりに n はもちろん使用不可）．**これを知らないと数学は絶対理解できません．** わかっていないとだみーだ，というわけです．

それはともかく，$R(a)$ は「a と同値な要素の全体からなる集合」です．(問題文では，まず，任意の a について $R(a)$ を定義するためにダミーの b を使い，そこで話は一旦完結して，その後改めて，任意の a, b をとってきた，という流れです.)

問題 3-2 の解答例：($\Rightarrow$) $a \sim b$ とする．そして，$x \in R(a)$ を任意にとる．すると，$a \sim x$．また対称律から $b \sim a$ なので，推移律から $b \sim x$．よって，$x \in R(b)$．したがって $R(a) \subset R(b)$．逆に $x \in R(b)$ を任意にとると，$b \sim x$．また $a \sim b$ なので，$a \sim x$．よって，$x \in R(a)$．したがって $R(b) \subset R(a)$．よって $R(a) = R(b)$.

($\Leftarrow$) $R(a) = R(b)$ とする．反射律より，$b \in R(b) = R(a)$．したがって，$a \sim b$.

問題 3-3 は省略.

以上.