レポート解説 基礎数学B (旧課程：数学序論 2，数学序論 G)

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２００８年度後期)

No. 2 (西暦２００８年１０月１０日 (金) 出題，１０月１６日 (木) 正午締めきり)

2-1

A, B を集合，$f : A \to B$ を写像とし，B_1, B_2 を B の部分集合とするとき，
$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ を示せ．

2-2

問題に誤りあり！(講義中に配布済みの問題訂正プリントを見よ.)

2-3

A, B を集合，$f : A \to B$ を写像とし，A' を A の部分集合とするとき，$f^{-1}(f(A')) \supset A'$ を示せ．また，$f^{-1}(f(A')) \neq A'$ となるような，具体的な写像 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ と $A' \subset \mathbf{R}$ の例を挙げて，説明せよ．

2-4

写像 $f : A \to B$ について，f のグラフを $\Gamma_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subset A \times B$ で定義する．
２つの写像 $f, g : A \to B$ について，$\Gamma_f = \Gamma_g \iff f = g$ が成り立つことを証明せよ．

問題 2-1 は皆さんよく解けていたので省略．

問題 2-2 も省略．

問題 2-3 は「**逆像**」に関する問題．逆像については，講義中に何度も詳しく説明したのにも関わらず，まだ理解していない人が多いので，繰り返し説明しましょう．写像 $f : A \to B$ と $B' \subset B$ について，B' の f による逆像は

$$f^{-1}(B') = \{a \in A \mid f(a) \in B'\}$$

で定義されます．定義を見るとすぐわかるように，$f^{-1}(B')$ は A の部分集合です．レポートで $b \in B$ について $f^{-1}(b)$ といった表現を使っているのを見かけましたが，上の定義にあるように，逆像は集合についてだけ考えているので，$f^{-1}(\{b\})$ と書くべきであり，その意味は $f^{-1}(\{b\}) = \{a \in A \mid f(a) \in \{b\}\} = \{a \in A \mid f(a) = b\}$ という A の部分集合です．

（もし，f が全単射のときならば,「逆写像」f^{-1} が存在するので，$f^{-1}(b)$ が考えられます．しかし，繰り返しになりますが，これは f が全単射のときだけ使えます．f が全単射でないときの $f^{-1}(b)$ の使用はいわば「反則」です．慎みましょう.）

さて，解答ですが，$a' \in A'$ とすると，像の定義から $f(a') \in f(A')$ なので，逆像の定義から，$a' \in f^{-1}(f(A'))$ となります．したがって，$A' \subset f^{-1}(f(A'))$ が分かります．等号が成り立たない例は，たとえば，$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2, A' = [0, 1]$ とおくと，$f(A') = [0, 1]$ であり，$f^{-1}(f(A')) = \{x \in A \mid x^2 \in [0, 1]\} = [-1, 1]$ となるから，$f^{-1}(f(A')) \neq A'$ です．

問題 2-4 $f = g \Rightarrow \Gamma_f = \Gamma_g$ はグラフの定義から明らかですが，$\Gamma_f = \Gamma_g \Rightarrow f = g$ はそれほど自明ではありません．

「$\Gamma_f = \Gamma_g \Rightarrow f = g$」の詳しい証明：$\Gamma_f = \Gamma_g$ とする．任意の $a \in A$ について，$(a, f(a)) \in \Gamma_f$ だから $(a, f(a)) \in \Gamma_g = \{(b, g(b)) \mid b \in A\}$．よって，$b \in A$ が存在して $(a, f(a)) = (b, g(b))$．すると，$a = b, f(a) = g(b)$．したがって，$f(a) = g(a)$．a は任意だったから，$f = g$．

ところで，$\{(a, f(a)) \in a \in A\} = \{(a, g(a)) \in a \in A\}$ から，任意の $a \in A$ について $(a, f(a)) = (a, g(a))$ ということを導いているレポートを見かけましたが，推論に飛躍があります.(結論はもちろん正しいのですが.) このような推論は，たとえば，

$$\{n \mid n \in \mathbf{Z}\} = \{n + 1 \mid n \in \mathbf{Z}\} \ (= \mathbf{Z})$$

から $n = n + 1$ を導いているのと同じ推論です．これは正しくないですね．

最後に問題 2-4 の類題を与えておきます．解いてみてください．

問題 2-4 の類題：写像 $f : A \to B$ に対して，$\Gamma_f^{-1} = \{(f(a), a) \in B \times A \mid a \in A\}$ とおく．写像 $g : B \to A$ について，$\Gamma_f^{-1} = \Gamma_g$ のとき，f, g の関係を述べよ．

以上．