レポート解説 基礎数学B (旧課程：数学序論 2，数学序論 G，数学序論 11 など)
担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２００８年度後期)

No. １０ (西暦２００９年１月９日 (金) 出題，１月１５日 (木) **午後１時**締めきり)

10-1 (X, d) を距離空間とするとき，次の問に答えよ．
(1) X の部分集合 U が開集合であるという定義を述べよ．(復習)
(2) X は Hausdorff 空間であることを示せ．(5+10)

10-2 $(X, \mathcal{U})$ を Hausdorff 位相空間とし，A を X の部分位相空間とする．このとき，A も Hausdorff 空間となることを示せ．(10)

10-3 $\mathbf{R}$ に Euclid 位相を入れ，$\{0, 1\}$ に $\mathbf{R}$ からの相対位相を入れるとき，次の問いに答えよ．
(1) 位相空間 X から $\{0, 1\}$ への連続写像 $f : X \to \{0, 1\}$ で全射であるものが存在するならば，X は連結でないことを示せ．
(2) 位相空間 X が連結でないならば，全射連続写像 $f : X \to \{0, 1\}$ が存在することを示せ．(10+10)

レポート No.10 は，Hausdorff 性と連結性に関する基本的な問題でした．「基本的な定義が大切」ということは次第に浸透してきた感じで嬉しいですが，それらの基礎的な定義をさらに柔軟に応用する点で不十分な人も多くいました．もう少しだけレポートに時間をかけれれば，というところでしょうか．

問題 11-1 の解答例： (1) は省略．(2) $x, y \in X$, $x \neq y$ とする．このとき，$d(x, y) > 0$ である．いま，$\varepsilon = \dfrac{1}{2}d(x, y)$ とおき，$U = U(x, \varepsilon), V = U(y, \varepsilon)$ とおく．U, V は X の開集合となる．(その証明はここでは省略)．さらに，$x \in U, y \in V$ であり，$U \cap V = \emptyset$ である．実際，$z \in U \cap V$ とすると，$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(x, y)$ となり矛盾を生じる．よって，$U \cap V = \emptyset$ である．したがって，X は Hausdorff 空間である．

問題 11-2 の解答例： $x, y \in A, x \neq y$ とする．X が Hausdorff 空間なので，x の開近傍 U' と y の開近傍 V' で，$U' \cap V' = \emptyset$ となるものが存在する．このとき，$U = A \cap U', V = A \cap V'$ とおくと，U, V は A の開集合であり，$x \in U, y \in V$ であり，$U \cap V = A \cap (U' \cap V') = \emptyset$ である．したがって，A は Hausdorff 空間である．

問題 11-3 の解答例： (1) 全射連続写像 $f : X \to \{0, 1\}$ が存在するとする．$\{0\}, \{1\}$ はそれぞれ $\{0, 1\}$ の開集合であり，f は連続であるから，$U = f^{-1}(\{0\}), V = f^{-1}(\{1\})$ とおくと，U, V は X の開集合である．また $X = U \cup V$ が成り立つ．さらに，f は全射だから，$U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$ である．したがって，X は連結でない．
(2) X が連結でないとする．このとき，X の開集合 U, V が存在して，$X = U \cup V, U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$ となる．このとき，写像 $f : X \to \{0, 1\}$ を $x \in U$ に対しては $f(x) = 0$, $x \in V$ に対しては $f(y) = 1$ と定める．このとき，f は全射である．さらに，f は連続である．実際，$\{0, 1\}$ の開集合は，$\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$ であるが，それぞれの f による逆像は $\emptyset, U, V, X$ であり，すべて X の開集合となる．

以上．