

レポート解説 基礎数学B (旧課程：数学序論2, 数学序論G)

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦2008年度後期)

No. 1 (西暦2008年10月3日(金) 出題, 10月9日(木) 正午締めきり)

1-1

P, Q を命題とする. 命題「 $P \Rightarrow Q$ 」の否定「 $(P \Rightarrow Q)$ でない」が、「 P かつ (Q) でない」と同値となる (つまり, 真偽をともしする) ことを説明せよ. (講義の説明をもとに, 自分自身の言葉で説明すればよい).

1-2

変数 x, y を含む命題 $P(x, y)$ について, 「 $\forall x \exists y, P(x, y)$ 」の否定が, 「 $\exists x \forall y, (P(x, y))$ でない」と同値となることを説明せよ. (講義の説明をもとに, 自分自身の言葉で説明すればよい).

1-3

集合 A, B, C について, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ を示せ. (教科書, 命題 1.2 (1) の証明をもとに, 適宜言い換えを行って証明文を作成してみるとよい.)

問題 1-1 は, 「形式論理」の問題. 命題「 $P \Rightarrow Q$ 」や「 $(P \Rightarrow Q)$ でない」や「 P かつ (Q) でない」が, それぞれ,

命題 P の真偽 (しんぎ) と命題 Q の真偽だけで, その真偽が決まる

ということを理解することがキーポイントになります. つまり, P や Q が具体的にどんな命題なのかを気にする必要がない, ということです.

たとえば, 命題「 $P \Rightarrow Q$ 」は, P が真であり, かつ, Q が偽でのとき, そのときだけ偽です. 他の3通りの組み合わせ (P 真, Q 真; P 偽, Q 真; P 偽, Q 偽) の場合はいずれも「 $P \Rightarrow Q$ 」は真になります. このことと「 P かつ (Q) でない」の真偽を比べればよいのです. (他の説明の仕方もあります. とにかく, 「命題」の真偽ということについて理解できているかどうか重要です.)

ところで, 数学の定理は, 通常「 $P \Rightarrow Q$ 」の形をしています. P が前提で, Q が結論です. 定理は, P が真の場合に, Q が真であることを保証します. P の真偽にかかわらず (つまり前提が成立しているかどうかにかかわらず) 真である命題が定理「 $P \Rightarrow Q$ 」です. 一方, 結論 Q の真偽は, 前提 P の真偽によって変わり得ます.

通常, 定理「 $P \Rightarrow Q$ 」の前提や結論には, いくつかの**変数** (variable, 数とは限りません. 集合や写像になる場合も多くあります) が入っています: 「 $P(x, y, \dots) \Rightarrow Q(x, y, \dots)$ 」. 一例をあげると「 x, y が実数で $x^2 + y^2 = 0$ ならば $x = 0, y = 0$ 」という命題は, そのような形をしています. (定理というほど大げさなものではないですが, 真である命題です). この場合, $P(x, y, \dots)$ は (x, y が実数で $x^2 + y^2 = 0$) という命題であり, $Q(x, y, \dots)$ は ($x = 0, y = 0$) という命題です. x, y によって, P の真偽は変わりますね. Q の真偽も変わりますね. でも, 「 $P \Rightarrow Q$ 」は x, y にかかわらず真な命題です.

問題 1-2 は, 講義でも少し説明したように, 「 $\forall x \exists y, P(x, y)$ 」を「 $\forall x (\exists y, P(x, y))$ 」という具合にカッコを付けて考えればわかりやすいと思います. つまり, 「 $\forall x (\exists y, P(x, y))$ 」の否定は, 「 $\exists x [(\exists y, P(x, y))$ でない]」なので, あとは, [...] の中身をもう一度書き換えればよいわけです.

$\forall x$ の否定は $\exists x$ という書き方をしているレポートが見かけられましたが, 「 $\forall x$ 」は命題ではないので, その否定というものはありません. あくまで「 $\forall x, Q(x)$ 」という具合に, 変数 x の入った命題を続けてはじめて, その否定が考えられます. (たとえと, 「吾輩はである」という文章は成り立たない, 「吾輩で猫である」と書かないと意味が通じない, というのと似ています.)

問題 1-3 は, 皆さんよくできていたようなので, 解説は省略します.