補充問題選その２ 基礎数学B (旧課程：数学序論 2，数学序論 G など)

担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお) (西暦２００８年度後期)

以下の問題では，$\mathbf{R}^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ には，特に断らない限り，通常の位相（Euclid 距離から定まる Euclid 位相）を入れる．

補１３． (X, d) を距離空間とするとき，次の問に答えよ．
(1) X の部分集合 U が開集合であるという定義を述べよ．
(2) X は第一可算公理を満たすことを示せ．(p.81)
(3) X が稠密な可算部分集合をもつとき，X は第二可算公理を満たすことを示せ．(p.77, p.103 参照)
(4) X は Hausdorff 空間であることを示せ．(異なる２点 x, x' について，$d(x, x') > 0$ である...)

補１４． X を位相空間とし，$f : X \to \mathbf{R}$ を写像とする．f が点 $x_0 \in X$ で連続であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，x_0 の開近傍 U が存在して，$x \in U$ ならば $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ が成り立つときにいう．このとき，次の問いに答えよ．
(1) 写像 $f : X \to \mathbf{R}$ について，次の２条件 (a) (b) が互いに同値であることを証明せよ．
　(a) f は連続である．(つまり，$\mathbf{R}$ の任意の開集合 V に対して，逆像 $f^{-1}(V)$ が X の開集合である．)
　(b) f が（上の意味で）任意の $x_0 \in X$ で連続である．
(2) $f, g : X \to \mathbf{R}$ を写像とする．f, g が $x_0 \in X$ で連続ならば $f + g : X \to \mathbf{R}, (f + g)(x) := f(x) + g(x),$ も x_0 で連続であることを示せ．(p.84)

補１５． $(X, \mathcal{U})$ を位相空間とし，X 上に同値関係 $\sim$ が与えられているとする．このとき商集合 $X/{\sim}$ の上の商位相 $\mathcal{U}' \subset \mathcal{P}(X/{\sim})$ を「$U \in \mathcal{U}' \iff \pi^{-1}(U) \in \mathcal{U}$」で定義する．ただし，$\pi : X \to X/{\sim}$ を自然は射影とする．このとき，次の問いに答えよ．
(1) $\mathcal{U}'$ が $X/{\sim}$ 上の位相となることを示せ．
(2) $\pi : X \to X/{\sim}$ が連続であることを証明せよ．(pp.91–92)

補１６． $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ に $\mathbf{R}^2$ から相対位相を入れる．写像 $f : \mathbf{R} \to S^1$ を $f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ で定める．このとき，次の問いに答えよ．
(1) f が連続であることを証明せよ．(p.84, p.87)
(2) f が開写像であることを証明せよ．(p.86)
(3) $\mathbf{R}$ の同値関係 $\sim$ を「$x \sim x' \overset{\text{def.}}{\iff} x - x' \in \mathbf{Z}$」で定めるとき，$f$ は同相写像 $\overline{f} : \mathbf{R}/{\sim} \to S^1$ を誘導することを示せ．(p.86, pp.91–92)

補１７． $\mathbf{R}$ に Euclid 位相を入れ，$\{0, 1\}$ に $\mathbf{R}$ からの相対位相を入れるとき，次の問いに答えよ．
(1) 位相空間 X から $\{0, 1\}$ への連続写像 $f : X \to \{0, 1\}$ で全射であるものが存在するならば，X は連結でないことを示せ．
(2) 位相空間 X が連結でないならば，全射連続写像 $f : X \to \{0, 1\}$ が存在することを示せ．

補１８． (X, d) を距離空間，$x \in X$ と $A (\neq \emptyset) \subset X$ に対し，$d(x, A) = \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$ と定める．このとき次の問いに答えよ．
(1) 任意の $x, x' \in X$，$a \in A$ に対し $d(x, A) - d(x, x') \leq d(x', a)$ となることを示せ．
(2) 写像 $f : X \to \mathbf{R}$ を $f(x) := d(x, A) \in \mathbf{R}, (x \in X),$ で定めるとき，f が連続であることを示せ．(p.84, p.143)

補１９． 位相空間 X の２つの稠密な開集合 U_1, U_2 の共通部分 $U_1 \cap U_2$ は稠密な開集合であることを示せ．(p.83)

補２０． X を位相空間，Y をハウスドルフ空間とする．次の問いに答えよ．
(1) $\Delta = \{(y, y) \in Y \times Y \mid y \in Y\}$ は $Y \times Y$ の閉集合であることを示せ．(pp.96–97)
(2) $f, g : X \to Y$ を連続写像とする．$f \times g : X \times X \to Y \times Y$ を $(f \times g)(x, x') := (f(x), g(x')), (x, x' \in X)$ で定めるとき，$f \times g$ は連続写像であることを示せ．(pp.90–91 参照．$Y \times Y$ の開集合のうち，$U \times V$ という形のものの逆像を調べても連続性が証明できる．)
(3) $f, g : X \to Y$ を連続写像とする．このとき，X の部分集合

$$C := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

が閉集合であることを示せ．

補２１． 二つの位相空間 X, Y が同相であるならば，「X が連結 $\Longleftrightarrow$ Y が連結」が成り立つことを示せ．(p.86, p.117)

補２３． X を位相空間，$a \in X$ とする．次の条件が同値であることを証明せよ．(pp.122–123)
(1) X は弧状連結．
(2) X の任意の点 x と点 a をつなぐ道が存在する．

補２２． 次の問いに答えよ．(p.122)
(1) $\mathbf{R}^n$ が弧状連結であることを示せ．
(2) $S^1 \subset \mathbf{R}^2$ が弧状連結であることを示せ．

補２４． 位相空間 $(X, \mathcal{P}(X))$（離散位相）がコンパクトならば，X は有限集合であることを証明せよ．(p.130)

補２５． 次の問いに答えよ．(p.87, pp.128–129)
(1) 位相空間 X の部分集合 A について，次の条件 (a) (b) は互いに同値であることを証明せよ．
(a) A に X からの相対位相を入れたとき，A がコンパクト位相空間である．
(b) X の開集合族 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ を満たすとき，有限個の $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_k}$ を選んで，$A \subset V_{\lambda_1} \cup \cdots \cup V_{\lambda_k}$ とできる．(A は X のコンパクト部分集合)
(2) 位相空間 X の部分集合 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ がすべてコンパクトであるならば，その和集合 $\bigcup_{n=1}^{k} A_n$ もコンパクトとなることを証明せよ．

補２６． 次の問いに答えよ．
(1) $\mathbf{R}$ はコンパクトでないことを（定義から直接）証明せよ．(p.129)
(2) $\mathbf{R}$ の部分集合 $A = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\} \cup \{0\}$ がコンパクトであることを（定義から直接）証明せよ．(A の任意の開被覆を考える)

補２７． $\mathbf{R}$ 上の Zariski 位相 $\mathcal{U}_Z$ について，$(\mathbf{R}, \mathcal{U}_Z)$ がコンパクトとなることを証明せよ．(p.97, p.167 参照)

補２８． 次の問いに答えよ．(p.130, p.135, p.136)
(1) X をコンパクト位相空間とし，$A \subset X$ を閉集合とするとき，A はコンパクトであることを示せ．
(2) $A \subset X$ をコンパクト部分集合とし，$f : X \to Y$ を連続写像とするとき $f(A)$ は Y のコンパクト部分集合であることを示せ．
(3) Y を Hausdorff 空間とし，$B \subset Y$ をコンパクト部分集合とするとき，B は Y の閉集合であることを示せ．
(4) X をコンパクト位相空間，Y を Hausdorff 位相空間とする．$f : X \to Y$ が全単射で連続とするとき，f は同相写像であることを証明せよ．

補２９． 空でない集合 X 上に，$\mathcal{U}_1 \supset \mathcal{U}_2$ を満たす開集合系 $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ があるとする．位相空間 $(X, \mathcal{U}_1)$ がコンパクトであり，$(X, \mathcal{U}_2)$ が Hausdorff 空間であるならば，$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$ となることを証明せよ．(補 28, p.86 例 2.9(3))

補３０． $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A がコンパクトであるための必要十分条件は，A が有界閉集合であることである．(p.134)

補３１． X, Y を距離空間とし，X はコンパクトと仮定する．このとき，任意の連続写像 $f : X \to Y$ は一様連続であることを示せ．(p.167)

補３２． 次の問いに答えよ．
(1) 距離空間 (X, d) が完備であるという定義を述べよ．(p.152)
(2) 距離空間 (X, d) の部分集合 A について，次の条件 (a) (b) は互いに同値であることを証明せよ．(p.146 参照)
(a) A は X の閉集合である．(つまり，$X \setminus A$ が X の開集合である．)
(b) A の点列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ の極限は A に属する．
(3) 完備な距離空間 (X, d) の部分距離空間 A が完備であるための必要十分条件は A が X の閉集合であることである．このことを証明せよ．(p.160)

以上．