補充問題選 基礎数学B (旧課程：数学序論 2，数学序論 G)

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２００８年度後期)

補１．

(1) $A = \{2n \mid n \in \mathbf{N}\}$ とおくと，

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2 \text{ または } x - 2 \in A\}$$

を満たすことを証明せよ．

(2) $\mathbf{N}$ の部分集合 A で，

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2 \text{ または } x - 2 \in A\}$$

を満たすものをすべて求めよ．

補２． A_n を次のような集合とするとき，$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$，$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n$ を求めよ．

$$A_n = \{x \in \mathbf{R} \mid \frac{1}{n} < x < 2 - \frac{1}{n}\}.$$

補３． A, B を集合，$f : A \to B$ を写像とし，B' を B の部分集合とするとき，$f(f^{-1}(B')) = B' \cap f(A)$ を示せ．

補４． 集合 $X = (0, 1)$，$Y = (-1, 2)$ に対し，全単射 $f : X \to Y$ を作れ．

補５． 写像 $f : A \to B$ に対して，$\Gamma_f^{-1} = \{(f(a), a) \in B \times A \mid a \in A\}$ とおく．写像 $g : B \to A$ について，$\Gamma_f^{-1} = \Gamma_g$ のとき，f, g の関係を述べよ．

補６． $X = \{A \mid A$ は $\mathbf{N}$ の有限部分集合$\}$ とおくとき，X が可算集合であることを示せ．

補７． $\mathbf{R}$ の閉区間の直積 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ は，$\mathbf{R}^2$ の閉集合であることを証明せよ．

補８． a，b を $\mathbf{R}^n$ の相異なる 2 点とするとき，$a \in U,\ b \in V,\ U \cap V = \emptyset$ となる $\mathbf{R}^n$ の開集合 U, V が存在することを示せ．

補９． $n \in \mathbf{N}$ とする．$A = (0, 1) \cup (1, 2) \cup \cdots \cup (n - 1, n)$ の $\mathbf{R}$ における閉包 $\overline{A}$ を求めよ．

補１０． $\mathbf{R}^n$ の部分集合 M に対し，$\overline{M} = ((M^c)^\circ)^c$ を示せ．

補１１． $\mathbf{R}^n$ における３種類の距離関数 $d_1(x, y) = \|x - y\|, d_2(x, y) = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|, d_3(x, y) = \sum_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$ について，次を示せ．

(1) 任意の $x, y \in \mathbf{R}^n$ について，$d_2(x, y) \le d_1(x, y) \le d_3(x, y) \le nd_2(x, y)$

(2) それぞれの距離関数が定める位相（開集合系）を，$\mathcal{U}_{d_1}, \mathcal{U}_{d_2}, \mathcal{U}_{d_3}$ とするとき，$\mathcal{U}_{d_1} = \mathcal{U}_{d_2} = \mathcal{U}_{d_3}$ を示せ．

補１２． $\mathbf{R}^n$ の 2 点 x, y に対し，実数 $\rho(x, y)(\ge 0)$ が定められ，

(1) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n, \rho(x, y) = 0 \iff x = y$，かつ (2) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}^n, \rho(x, y) \le \rho(z, x) + \rho(z, y)$

が成り立つとき，ρ は，(3) $\forall x, y,\ \rho(x, y) = \rho(y, x)$ という性質も持つ（したがって，距離関数の定義をすべて満たす）ことを示せ．

以上．