レポート表紙 幾何学Ａ (旧課程：幾何学３など)
担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２００８年度後期)

- 提出先：８号館３階数学科事務室前の「幾何学 A」専用レポートボックス
- 締めきり：出題した週の翌週の火曜日**午後１時**まで
  締めきり厳守 (遅れて提出されたものは残念ながら評価外).
- 必ずこの表紙を第１ページとして，その後にレポート用紙 (A4 版) を付け足すこと．(コピー不可)．
- この表紙に，氏名，学生番号を明記すること．
- 答えだけではなく，説明・推論・計算過程をできるだけ詳しく書くこと．

学年　　　(学部・学科　　　　　) 学生番号　　　　　　　　氏名

No. 5 (西暦２００８年１２月１７日（水） 出題，１２月２４日 (水) 午後１時締めきり)

5-1

S^2 上の 1-パラメータ変換群 $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbf{R}}$，$\Phi_t : S^2 \to S^2$ を，$(x_1, x_2, x_3) \in S^2$ に対して，

$$\Phi_t(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cos t - x_2 \sin t, x_1 \sin t + x_2 \cos t, x_3),$$

で定める．一方，S^2 上のベクトル場 X を

$$X(x_1, x_2, x_3) = -x_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{(x_1,x_2,x_3)} + x_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_{(x_1,x_2,x_3)}$$

（を S^2 に制限して考えたもの）と定める．このとき次の問いに答えよ．
(1) 任意の $t, s \in \mathbf{R}$ について，$\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$ が成り立つことを確かめよ．
(2) $x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$ を任意に１つとり，C^∞ 曲線 $\Phi(x) : \mathbf{R} \to S^2$ を，$\Phi(x)(t) = \Phi_t(x), (t \in \mathbf{R})$ により定めるとき，$\Phi(x)$ が X の積分曲線になることを示せ．
（ヒント：S^2 は $\mathbf{R}^3$ の C^∞ 部分多様体であるから，$T_xS^2 \subset T_x\mathbf{R}^3$ なので，$\Phi(x)$ を $\mathbf{R}^3$ 内の曲線と考えて，等式 $\dfrac{d(\Phi(x)(t))}{dt} = X(\Phi(x)(t))$ が成り立つことを示すとよい．）(5+10)

5-2

C^∞ 多様体 N 上の C^∞ ベクトル場 X, Y, Z について，次の問いに答えよ．
(1) ブラケット $[X, Y]$ の定義をのべよ．
(2) Jacobi 律

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

が成り立つことを確かめよ．
（ヒント：座標近傍上で局所表示して解いてもよいし，ベクトル場を任意の C^∞ 関数に作用させて示してもよい．）(5+10)
