幾何学 A プリント (旧課程：幾何学３など)

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２００９年度後期)

《 多様体上のベクトル解析入門 》

以下，簡単のため，多様体や写像はすべて C^∞ 級とする．

1 Riemann 計量，Riemann 計量の存在（1 の分割の応用）

ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ の標準的な内積は，$u = {}^t(u_1, \ldots, u_n)$, $v = {}^t(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ について，

$$(u, v) := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

で定義される．そこで，$\mathbf{R}^n$ の各点の接空間 $T_x\mathbf{R}^n$ を（$\mathbf{R}^n$ の標準的な座標系に関して）$\mathbf{R}^n$ と同一視したとき，$T_x\mathbf{R}^n$ に標準的な内積が定まる．これが，$\mathbf{R}^n$ 上の Euclid 計量である．

$\mathbf{R}^n$ 上の Euclid 計量 $g = \{g_x\}_{x \in \mathbf{R}^n}$ は，$g_x : T_x\mathbf{R}^n \times T_x\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$,

$$g_x\left(\sum_{i=1}^{n} u_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x, \sum_{j=1}^{n} v_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_x\right) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

$(1 \leq i, j \leq n)$，により定義される．Euclid 計量は，次にのべる Riemann 計量の一例である．

定義 1.1 n 次元多様体 N 上の Riemann 計量 とは，各接空間 T_xN 上の正定値計量 $g_x : T_xN \times T_xN \to \mathbf{R}$ の集まり $\{g_x\}_{x \in N}$ であって，N 上の座標近傍 (U, φ), $\varphi : U \to \mathbf{R}^n$ について定まる各 $x \in U$ での接空間 T_xN の基底 $(\frac{\partial}{\partial x_1})_x, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_x$ について，

$$g_x\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_x\right) = g_{ij}(x)$$

$(1 \leq i, j \leq n)$，とおくとき，$g_{ij}(x)$ が U 上の C^∞ 関数となるもののことである．

多様体 N とその上の Riemann 計量の組 (N, g) を Riemann 多様体とよぶ．

注 1.2 $g_x : T_xN \times T_xN \to \mathbf{R}$ が 正定値計量 とは，次の３条件が成り立つことである：
(1) 任意の $u, v \in T_xN$ について，$g_x(u, v) = g_x(v, u)$.（対称性）
(2) 任意の $u, u', v \in T_xN, a, b \in \mathbf{R}$ について，$g_x(au + bu', v) = a\, g_x(u, v) + b\, g_x(u', v)$.（双線形性）
(3) 任意の $u \in T_xN$ について，$g_x(u, u) \geq 0$ であり，$g_x(u, u) = 0$ なのは $u = 0$ のときに限る．（正定値性）
なお，条件 (1)(2) から，第２成分に関する線形性 $g_x(u, av + bv') = a\, g_x(u, v) + b\, g_x(u, v')$ が導かれる．

例 1.3 $\mathbf{R}^n$ 上の Euclid 計量は，C^∞ Riemann 計量である．実際，Euclid 計量に関して g_{ij} は Kronecker のデルタ δ_{ij} であり，定数なので当然 C^∞ 関数である．

また，$\mathbf{R}^n$ の任意の開部分多様体 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 上に Euclid 計量を制限しても C^∞ Riemann 計量となる．

定理 1.4 C^∞ 多様体上には C^∞ Riemann 計量が存在する．

この定理の証明のために，次の概念と定理を応用する．

定義 1.5 (1 の分割) N を C^∞ 多様体とし，$\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を N の開被覆, $N=\cup_{\lambda\in\Lambda}W_\lambda$ とする．$\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に従属した <u>1 の分割</u>(partition of unity) とは，区間 $[0,1]$ に値をとる N 上の C^∞ 関数の族 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で，条件

(1) $\mathrm{support} f_\lambda \left(:= \overline{\{x\in N \mid f_\lambda(x)\neq 0\}}\right) \subset W_\lambda$,
(2) $\{\mathrm{support} f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は局所有限，つまり，各 $x\in N$ に対し，x の近傍 U が存在して，$(\mathrm{support} f_\lambda)\cap U\neq\emptyset$ となる $\lambda\in\Lambda$ は有限個のみ,
(3) $\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x)\equiv 1$, $(x\in N)$.
をみたすもののことである．定数関数 1 を，関数 f_λ たちが分割している．

定理 1.6 N を C^∞ 多様体とする．N の任意の開被覆 $\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，それに従属する 1 の分割が存在する．

定理 1.6 の証明は，教科書 pp. 197–198 にある．

定理 1.4 の証明. $N=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}W_\lambda$ を N の座標近傍による開被覆とする．各 W_λ には Riemann 計量が入る．実際，$g_{\lambda x}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_x\right)=\delta_{ij}$ により定まればよい．問題は，各 W_λ 上でしか定義されていない Riemann 計量 g_λ たちを少しずつ変えてつなげて，N 全体で定まる Riemann 計量にすることである．そのために定理 1.6 で存在が保証されている「 1 の分割」を利用する．

開被覆 $\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に従属した 1 の分割を $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ とする．このとき，

$$g_x(u,v)=\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x) g_{\lambda x}(u,v), \quad (u,v\in T_xN),$$

とおけば，g は N 上の C^∞ Riemann 計量となる．まず，g_λ の support の局所有限性から，上の和は有限和となることに注意する．また，対称性，双線形性は明らかである．したがって，正定値性と C^∞ 性を示せばよい．g_x の正定値性については，$f_\lambda(x)\geq 0, g_{\lambda x}(u,u)\geq 0$ であるから，$g_x(u,u)=\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x)g_{\lambda x}(u,u)\geq 0$ であり，$g_x(u,u)=0$ とすると，各 λ に対して，$f_\lambda(x)g_{\lambda x}(u,u)=0$ が言えるが，$\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x)=1$ なので，或る λ については $f_\lambda(x)>0$ となり，その λ について $g_{\lambda x}(u,u)=0$ であり，g_λ の正定値性から $u=0$ となる．また正定値性計量 g の C^∞ 性については，各 W_λ 上で,

$$g_{ij}(x)=g_x\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_x\right)=\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x)g_{\lambda x}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_x\right)=\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x)g_{\lambda ij}(x)$$

は C^∞ 関数となることからわかる．各 $g_{\lambda ij}(x)$ は W_λ 上でしか定義されていない C^∞ 関数だが，$\mathrm{support} f_\lambda\subset W_\lambda$ なので，$x\in N\setminus U_\lambda$ については，x の近傍 U があって，$\mathrm{support} f_\lambda\cap U=\emptyset$ となり，U 上では $f_\lambda(x)g_{\lambda ij}(x)\equiv 0$ となり，N 上の C^∞ 関数とみなすことができるからである．

以上により，g は N 上の C^∞ Riemann 計量である． □

例 1.7 (N,g) を C^∞ Riemann 多様体とする．M を N の C^∞ 部分多様体とする．各 $x\in M$ について，$h_x: T_xM\times T_xM\to \mathbf{R}$ を $h_x(u,v)=g_x(u,v)$ $(u,v\in T_xM)$ により定めると，$h=\{h_x\}_{x\in M}$ は M 上の C^∞ Riemann 計量となる．実際，各 h_x は対称双線形正定値計量であり，各座標近傍 V 上で $h_{ij}=g_{ij}|_V$ は C^∞ 関数だからである．

2　微分形式

2.1　双対ベクトル空間

V を実ベクトル空間とする（$V=\mathbf{R}^n$ や n 次元 C^∞ 多様体 N の接ベクトル空間 $V=T_{x_0}N$ に対して応用する.）このとき，

$$V^* = \{\alpha \mid \alpha : V \to \mathbf{R} \text{ 線形写像 }\}$$

とおく．各 $\alpha \in V^*$ は線形写像だから，$u, v \in V, c \in \mathbf{R}$ について，

$$\alpha(u+v) = \alpha(u) + \alpha(v), \quad \alpha(\lambda u) = \lambda \cdot \alpha(u)$$

が成り立つ．V^* は，$\alpha, \beta \in V^*, \lambda \in \mathbf{R}$ に対して，

$$(\alpha+\beta)(v) = \alpha(v) + \beta(v), \quad (c\alpha)(v) = c \cdot \alpha(v), \quad (v \in V),$$

により，和とスカラー倍が定義できて，ベクトル空間となる．
この V^* をベクトル空間 V の 双対ベクトル空間(dual vector space) あるいは単に 双対空間 とよぶ．双対は「そうつい」と読む．

注 2.1 $\alpha \in V^*, v \in V$ について，$\alpha(v) \in \mathbf{R}$ を $\langle \alpha, v \rangle$ と表すことがある．

例 2.2 $V=\mathbf{R}^n$ を n 次 “列ベクトル” の空間と見なし，$V^* = (\mathbf{R}^n)^*$ を n 次 “行ベクトル” の空間と見なせば，$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in V^*, v = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ について，

$$\alpha(v) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_2 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

となる．

$u_1, \ldots, u_n$ が n 次元ベクトル空間 V の基底であるとき，$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V^*$ を，$\alpha_i(u_j) = \delta_{ij}, (1 \leq i, j \leq n)$，$\delta_{ij}$ は Kronecker のデルタ，で定める．$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ は V^* の基底になることがわかるので，これを $u_1, \ldots, u_n$ に対する 双対基底(dual basis) とよぶ．

例 2.3 $V=\mathbf{R}^2$ の基底 $u_1 = {}^t(1,1), u_2 = {}^t(0,1)$ の双対基底は $\alpha_1 = (1,0), \alpha_2 = (-1,1)$ で与えられる．

$H : V \to W$ をベクトル空間 V からベクトル空間 W への線形写像とする．$\beta \in W^*$ について，$(H^*(\beta))(v) = \beta(H(v)) \in \mathbf{R}$, $(v \in V)$ により，$H^*(\beta) \in V^*$ が定まる．こうして，写像 $H^* : W^* \to V^*$ が定まるが，これは線形写像となる．H^* を H の 双対線形写像(dual linear mapping) とよぶ．

2.2　余接ベクトル空間

N を n 次元 C^∞ 多様体とする．$x_0 \in N$ に対して，接ベクトル空間 $T_{x_0}N$ の双対ベクトル空間 $(T_{x_0}N)^*$ を $T^*_{x_0}N$ と書き，x_0 における N の 余接ベクトル空間(cotangent vector space) あるいは単に 余接空間(cotangent space) とよぶ．余接ベクトル空間の要素を 余接ベクトル(cotangent vector) とよぶ．

点 x_0 のある開近傍の上で定義された C^∞ 関数 $f : U \to \mathbf{R}$ の微分 $df_{x_0} : T_{x_0}N \to \mathbf{R}$ は，余接ベクトルを定める．その定義は，各 $v \in T_{x_0}N$ に対して，それを表す曲線 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N, \gamma(0) = x_0$ について，$df_{x_0}(v) = \dfrac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) \in \mathbf{R}$ を対応させるものである．

x_0 のまわりの C^∞ 座標近傍 (W,φ) をとる．$\varphi : W \to \mathbf{R}^n$ であるが，$\varphi = (x_1,\ldots,x_n)$ と表すとき，$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{x_0},\ldots,\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{x_0}$ という $T_{x_0}N$ の基底が定まった．[x_i-座標だけを動かし，他の座標を止めて得られる N 上の曲線 $\gamma_i(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x_0)+(0,\ldots,0,t,0,\ldots,0))$ を考え，その曲線が定める接ベクトルが $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_0}$ であった．] 一方，各座標関数 x_i は W 上の C^∞ 関数なので，微分 $(dx_i)_{x_0} \in T^*_{x_0}N$ が定まる．このとき，$(dx_1)_{x_0},\ldots,(dx_n)_{x_0}$ は，$T_{x_0}N$ の基底 $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{x_0},\ldots,\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{x_0}$ の双対基底となる．実際，関数 $x_i\circ\gamma_j(t)$ は，$i=j$ のときは，$t+$(定数) であり，$i\neq j$ のときは定数になるので，$(dx_i)_{x_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{x_0} = \dfrac{d(x_i\circ\gamma_j)}{dt}(0) = \delta_{ij}$ となるからである．したがって，任意の余接ベクトル $\alpha \in T^*_{x_0}N$ は一意的に $(dx_1)_{x_0},\ldots,(dx_n)_{x_0}$ の 1 次結合で表される：

$$\alpha = a_1(dx_1)_{x_0}+\cdots+a_n(dx_n)_{x_0}.$$

注 2.4 余接ベクトル空間の加法やスカラー倍は接ベクトル空間の場合より考えやすい．実際，関数の和やスカラー倍から余接ベクトルの和やスカラー倍が誘導される．N 上の関数 f,g について，

$$df_x+dg_x = d(f+g)_x,\quad d(\lambda f) = \lambda\, df_x$$

$(x\in N,\lambda\in\mathbf{R})$ が成り立つ．

<u>余接ベクトルの変換公式</u>: x_0 のまわりの別の座標近傍 $(W',\varphi'),\varphi' = (x'_1,\ldots,x'_n) : W' \to \mathbf{R}^n$ について，$\alpha\in T^*_{x_0}N$ を

$$\alpha = a'_1(dx'_1)_{x_0}+\cdots+a'_n(dx'_n)_{x_0}.$$

と表したとき，
成分に関する変換公式

$$(a'_1,a'_2,\ldots,a'_n)J = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$$

基底に関する変換公式

$$\begin{pmatrix} dx'_1\\ dx'_2\\ \vdots\\ dx'_n\end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} dx_1\\ dx_2\\ \vdots\\ dx_n\end{pmatrix}$$

が成り立つ．ただし，n 次正方行列 $J = J(\varphi'\circ\varphi^{-1})(\varphi(x_0))$ は (W,φ) から (W',φ') への座標変換行列である．

変換公式は，[$dx'_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}dx_j$] と表される．Einstein の規約を使えば，[$dx'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}dx_j$] と表すこともできる．

<u>微分の双対</u>: $F : N\to M$ を C^∞ 写像とし，$x_0\in N$ とする．F の x_0 における微分 $(dF)_{x_0} : T_{x_0}N \to T_{F(x_0)}M$ は線形写像であるから，その双対 $(dF)^*_{x_0} : T^*_{F(x_0)}M \to T^*_{x_0}N$ が定まる．$(dF)^*_{x_0}(\beta)(v) = \beta((dF)_{x_0}(v))\in\mathbf{R}, (\beta\in T^*_{F(x_0)}M, v\in T_{x_0}N)$ が成り立つ．
<u>関数の引き戻し</u>: M における $F(x_0)$ の開近傍で定義された C^∞ 関数 h に対し，F による引き戻し $F^*(h) = h\circ F$ が考えられる．$F^*(h)$ は N における x_0 の開近傍で定義された C^∞ 関数である．このとき，$(dF)^*_x$ は $dh_{F(x)}\in T^*_{F(x)}M$ を $d(F^*(h))_x\in T^*_xN$ に写す．$(dF)^*_x$ は $F^* : T^*_{F(x)}M \to T^*_xN$ とも表される．

2.3　多様体上の微分 1-形式

N の各点 x に対し，余接ベクトル $\alpha_x \in T_x^*N$ を対応させる対応規則 α を，N 上の 微分 1-形式 と呼ぶ．$\alpha : N \to \bigcup_{x\in N} T_x^*N$ である．これは「ベクトル場の双対概念」と考えられる．微分 1-形式はベクトル場の場合と同様に各局所座標近傍 U の上で局所表示

$$\alpha_x = a_1(x)(dx_1)_x + \cdots + a_n(x)(dx_n)_x$$

を持つ．$a_1, \ldots, a_n$ が U 上の C^∞ 関数のとき，α は C^∞ 微分 1-形式 と呼ばれる．以下， C^∞ 微分 1-形式を単に 微分 1-形式 あるいは Pfaff 形式 と呼ぶ．

f を N 上の C^∞ 関数とする．N の各点 x で，f の定める余接ベクトル $df_x \in T_x^*N$ を対応させる微分 1-形式を記号 df であらわし，関数 f の 外微分(exterior differential) と呼ぶ．
df の局所表示は，

$$(df)_x = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)(dx_1)_x + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)(dx_n)_x$$

となる．ここで，座標近傍 (U, φ) に対して，$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \dfrac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_1}(\varphi(x))$ などと略記している．すると，各 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ は C^∞ 関数だから，df は N 上の C^∞ 微分 1-形式である．

注 2.5 一般にすべての微分 1-形式を，ある関数の外微分の形には，局所的にも書くことはできない．各余接ベクトルについて，それらの代表元としていっせいに 1 つの関数を選べるとは限らないのである．関数の外微分の形に表されるような微分 1-形式を 完全微分 1-形式 (exact differential 1-form) とよぶ．

N, M を C^∞ 多様体とし，$F : N \to M$ を C^∞ 写像とする．このとき，M の微分 1-形式 α について，α の F による 引き戻し $F^*\alpha$ が，$(F^*\alpha)_x(u) = \alpha_{F(x)}(dF_x(u))$, $u \in T_xN$ により定まる．$F^*\alpha$ は N の微分 1-形式である．

外微分と引き戻しの関係.
$h : M \to \mathbf{R}$ を M 上の C^∞ 関数とするとき，

$$F^*(dh) = d(F^*h)$$

が成り立つ．

2.4　双線形 2-形式

接ベクトル空間 $V = T_xN$ は n 次元ベクトル空間であった．余接ベクトル $\alpha \in V^* = T_x^*N$ は $\alpha : V \to \mathbf{R}$ という線形写像（あるいは線形形式）であった．線形形式は 1-形式 とも呼ばれる．

さて，$\omega : V \times V \to \mathbf{R}$ が V 上の 双線形 2-形式（あるいは，単に 2-形式）とは，

$$\omega(au + bu', v) = a\,\omega(u, v) + b\,\omega(u', v), \quad \omega(u, av + bv') = a\,\omega(u, v) + b\,\omega(u, v'),$$

がすべての $u, u', v, v' \in V$ とすべての $a, b \in \mathbf{R}$ について成り立つことである．V 上の双線形 2-形式の全体の空間はベクトル空間となる．実際，ω と ω' を V 上の 2-形式とするとき，和 $\omega + \omega'$ とスカラー倍 $\lambda\omega$ を

$$(\omega + \omega')(u, v) = \omega(u, v) + \omega'(u, v), \quad (\lambda\omega)(u, v) = \lambda(\omega(u, v)),$$

で定義すれば，それぞれ V 上の双線形 2-形式である．V 上の双線形 2-形式のなすベクトル空間を $V^* \otimes V^*$ と書く．$\dim_{\mathbf{R}}(V^* \otimes V^*) = n^2$ である．実際，$e_1, \ldots, e_n$ を V の基底とする．番号の組 (i,j) に対し，双線形 2-形式 $\omega_{ij} : V \times V \to \mathbf{R}$ を，基底での値を

$$\omega_{ij}(e_k, e_\ell) = \delta_{ik}\delta_{j\ell},\ 1 \le k, \ell \le n,$$

により定め，双線形性によって，

$$\omega_{ij}(\sum_k u_k e_k, \sum_\ell v_\ell e_\ell) = \sum_{k,\ell} u_k v_\ell \omega_{ij}(e_k, e_\ell) = \sum_{k,\ell} u_k v_\ell \delta_{ik}\delta_{j\ell} = u_i v_j$$

という具合に定義する．すると，$\omega_{ij}, (1 \le i, j \le n)$ は $V^* \otimes V^*$ の基底になる．(V の基底 $e_1, \ldots, e_n$ に対する V^* の双対基底を $e_1^*, \ldots, e_n^*$ とするとき，$\omega_{ij} = e_i^* \otimes e_j^*$ と表わす.)

V 上の双線形 2-形式 ω が 対称形式 であるとは，すべての $u, v \in V$ に対し，

$$\omega(v, u) = \omega(u, v)$$

のなりたつときである．また双線形 2-形式 ω が 交代形式 であるとは，すべての $u, v \in V$ に対し，

$$\omega(v, u) = -\,\omega(u, v)$$

の成り立つときである．対称双線形 2-形式の全体の空間を $V^* \odot V^*$ で表わし，交代双線形 2-形式の全体の空間を $V^* \wedge V^*$ で表わす．すると，$V^* \odot V^*$ と $V^* \wedge V^*$ は共に $V^* \otimes V^*$ の部分空間となり，

$$V^* \otimes V^* = (V^* \odot V^*) \oplus (V^* \wedge V^*)$$

と直和に分解される．$\omega_{ij} + \omega_{ji}$, $1 \le i \le j \le n$, は $V^* \odot V^*$ の基底であり，$\omega_{ij} - \omega_{ji}$, $1 \le i < j \le n$, は $V^* \wedge V^*$ の基底である．したがって $\dim_{\mathbf{R}} V^* \odot V^* = \frac{n(n+1)}{2}$ であり $\dim_{\mathbf{R}} V^* \wedge V^* = \frac{n(n-1)}{2}$ である．

注 2.6 一般に V 上の双線形 p-形式 (あるいは単に p-形式) とは，写像

$$\rho : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{p\ \text{個の直積}} \to \mathbf{R}$$

であって，各成分に関して線形であるものをいう．対称 p-形式，交代 p-形式の概念も 2-形式の場合と同様に定義される．V 上の交代 p-形式のなすベクトル空間を $\wedge^p(V^*)$ で表わす．

2.5 外積と内部積

ベクトル空間 V 上の２つの 1-形式 $\alpha : V \to \mathbf{R}$ と $\beta : V \to \mathbf{R}$ に対し，交代双線形 2-形式 $\alpha \wedge \beta : V \times V \to \mathbf{R}$ を

$$(\alpha \wedge \beta)(u, v) = \begin{vmatrix} \alpha(u) & \alpha(v) \\ \beta(u) & \beta(v) \end{vmatrix} = \alpha(u)\beta(v) - \alpha(v)\beta(u)$$

で定義する．$\alpha \wedge \beta$ を α と β の 外積(あるいは ウェッジ積) と呼ぶ．

1 形式の外積については，

$$\alpha \wedge \alpha = 0, \quad \beta \wedge \alpha = -\alpha \wedge \beta$$

が成り立つ．

注 2.7 V の基底を $e_1,\dots,e_n$ とし，V^* の双対基底を $e_1^*,\dots,e_n^*$ とするとき，$e_i^*\wedge e_j^* = e_i^*\otimes e_j^* - e_j^*\otimes e_i^*$ が成り立つ．

また，$u\in V$ と双線形 2-形式 $\omega\in V^*\otimes V^*$ に対し，1-形式 $i_u\omega\in V^*$ を，各 $v\in V$ に対し，$(i_u\omega)(v)=\omega(u,v)$ で定義する．(u は最初の位置に置くことに注意する.) $i_u\omega$ を ω の u による内部積とよぶ．このとき，1-形式の等式 $i_u(\alpha\wedge\beta)=\alpha(u)\beta-\beta(u)\alpha$ がなりたつ．実際 $v\in V$ に対して

$$i_u(\alpha\wedge\beta)(v)=(\alpha\wedge\beta)(u,v)=\alpha(u)\beta(v)-\beta(u)\alpha(v)=(\alpha(u)\beta-\beta(u)\alpha)(v)$$

が成り立つ．

注 2.8 V の基底を $e_1,\dots,e_n$ とし，V^* の双対基底を $e_1^*,\dots,e_n^*$ とするとき，$i_{e_i}(e_j^*\wedge e_k^*)=\delta_{ij}e_k^*-\delta_{ik}e_j^*$ が成り立つ．

2.6 多様体上の微分 2-形式

N を n 次元多様体とする．N 上の 微分 2-形式 とは，各点 $x\in N$ に対して，接空間 T_xN 上の交代双線形 2-形式

$$\omega_x : T_xN\times T_xN\to\mathbf{R}$$

を対応させるものである．局所座標に関して，$dx_i\wedge dx_j, (1\le i<j\le n)$, は $T_x^*N\wedge T_x^*N$ の基底であるから，

$$\omega_x=\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}(x)dx_i\wedge dx_j$$

と一意的に表わされる．係数の各関数 $a_{ij}(x), (1\le i<j\le n)$ が C^∞ 関数のとき，ω は N 上の C^∞ 微分 2-形式であるという．以下， C^∞ 微分 2-形式を単に 微分 2-形式 とよぶ．

多様体 N 上の微分 1 形式 α,β に対して，外積 $\alpha\wedge\beta$ が $(\alpha\wedge\beta)_x=\alpha_x\wedge\beta_x$ により定義される．また，C^∞ ベクトル場 X と C^∞ 微分 2-形式 ω について，内部積 $i_X\omega$ が

$$(i_X\omega)_x(u)=(i_{X_x}\omega_x)(u)=\omega_x(X_x,u),\ (u\in T_xN),$$

により定義される．$i_X\omega$ は C^∞ 微分 1-形式である．

微分 2-形式の写像による引き戻し．
$F:N\to M$ を C^∞ 写像とし，η を M の C^∞ 微分 2-形式とするとき，η の F による引き戻し $F^*\eta$ が，$(F^*\eta)_x(u,v)=\eta_{F(x)}(dF_x(u),dF_x(v))$ で定義される．$F^*\eta$ は N の C^∞ 微分 2-形式である．

微分 1-形式の外微分．
α を N の C^∞ 微分 1 形式とする．α の 外微分(exterior differential) $d\alpha$ を局所座標を決めて，$\alpha_x=\sum_{i=1}^n a_i(x)(dx_i)_x$ と一意的に表したとき，$(d\alpha)_x=\sum_{i=1}^n (da_i)_x\wedge(dx_i)_x$ で定める．

補題 2.9 $d\alpha$ は，局所座標のとり方によらず N の C^∞ 微分 2-形式として定まる．

証明. α を微分 1-形式とする．点 x_0 のまわりの局所座標系に関し，

$$\alpha_x=a_1(x)dx_1+\cdots+a_n(x)dx_n$$

と表わされ，別の座標系について

$$\alpha_x = a'_1(x)dx'_1 + \cdots + a'_n(x)dx'_n$$

表わされたとする．古い座標系に関し $d\omega(x)$ を計算すると

$$\sum_i da_i \wedge dx_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i$$

であるが,

$$dx_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial x'_k} dx'_k, \quad dx_i = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x'_\ell} dx'_\ell,$$

であるから

$$d\omega(x) = \sum_{i,j,k,\ell} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_k} \frac{\partial x_i}{\partial x'_\ell} dx'_k \wedge dx'_\ell = \sum_{i,k,\ell} \frac{\partial a_i}{\partial x'_k} \frac{\partial x_i}{\partial x'_\ell} dx'_k \wedge dx'_\ell$$

である．ここで $a_i = \sum_m a'_m \dfrac{\partial x'_m}{\partial x_i}$ であり,

$$\frac{\partial a_i}{\partial x'_k} = \sum_m \frac{\partial a'_m}{\partial x'_k} \frac{\partial x'_m}{\partial x_i}$$

もわかる (もう 1 つの項は消える) から,

$$\begin{aligned} d\omega_x &= \textstyle\sum_{i,m,k,\ell} \dfrac{\partial a'_m}{\partial x'_k} \dfrac{\partial x'_m}{\partial x_i} = \dfrac{\partial a'_\ell}{\partial x'_k} dx'_k \wedge dx'_\ell \\ &= \textstyle\sum_{k,\ell} \dfrac{\partial a'_\ell}{\partial x'_k} dx'_k \wedge dx'_\ell = \sum_\ell da'_\ell \wedge dx'_\ell \end{aligned}$$

と，新しい局所座標系における定義と整合する.（計算の途中で連鎖律を何度も使っている）． □

次がわかる．

命題 2.10 （Poincarè の補題）N を C^∞ 多様体とし，h を N 上の C^∞ 関数とするとき，$d(dh) = 0$ が成り立つ．

証明. 局所表示で $dh = \sum_{j=1}^n \dfrac{\partial h}{\partial x_j} dx_j$ と表したとき,

$$d(dh) = \sum_{j=1}^n d\left(\frac{\partial h}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j$$

と表示される．ここで,

$$dx_i \wedge dx_i = 0, \quad dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

が成り立つので，$i < j$ となる番号 i, j に関する和にまとめて,

$$\sum_{1 \le i < j \le n} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j$$

となる．さらに，h は C^∞ 関数だから，$\dfrac{\partial^2 h}{\partial x_i x_j} = \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_j x_i}$ が成り立つので，結局，$d(dh) = 0$ を得る．□

また，次のことも知られているが，証明は省略する．

定理 2.11 （Poincarè の補題の逆）α を N 上の C^∞ 微分 1-閉形式とする．すると，N の各点 x_0 に対し，x_0 の開近傍 U があって，ω は U 上の完全微分 1-形式である．すなわち，U 上の C^∞ 関数 h があって，U 上で $\alpha = dh$ となる．(U を可縮な開近傍にとればよい）．

3 微分形式の積分

4 ベクトル解析最高