補充問題１ 幾何学Ａ (旧課程：幾何学３)

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２００８年度後期)

問題１: $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ のとき，ヤコビ行列に関する公式

$$J(g \circ f)(\boldsymbol{x}) = J(g)(f(\boldsymbol{x}))\ J(f)(\boldsymbol{x})$$

を証明せよ．($\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)), g(y_1, y_2) = (g_1(y_1, y_2), g_2(y_1, y_2))$ とおいて確かめるとよい).

問題２: C^∞ 写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ で定義する．このとき，$a \in \mathbf{R}$ が f の正則値であるための条件を求めよ．

問題３: n 次元射影空間 $\mathbf{R}P^n$ がコンパクトであることを示せ．

問題４: $S^n = \{x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$ を単位球面とする．写像 $\pi : S^n \to \mathbf{R}^n$ を $\pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$ で定めるとき，π が C^∞ 写像であることを示せ．

問題５: $N = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ に $\mathbf{R}^3$ からの相対位相を入れたとき，次の問に答えよ．
(1) N を図示せよ．
(2) N はコンパクトかどうか判定せよ．
(3) N の C^∞ 構造を１つ与えよ．
(4) $f : N \to S^1$ を $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ で定めたとき，f が点 $(1, 0, 0)$ で C^∞ 級かどうか調べよ．

問題６: N を C^r 多様体 $(r \geq 1)$ とし，$x_0 \in N$ とする．x_0 を通る C^r 曲線が x_0 で等速度（あるいは，x_0 で同じ速度ベクトルを持つ，あるいは，x_0 で同じ接ベクトルを持つ）という関係が同値関係であることを示せ．

問題７: N を C^r 多様体 $(r \geq 1)$ とし，$x_0 \in N$ とする．$v, w \in T_{x_0}N, \lambda \in \mathbf{R}$ と x_0 の開近傍 U 上で定義された C^r 関数 $f : U \to \mathbf{R}$ について，

$$(v + w)(f) = v(f) + w(f), \quad (\lambda v)(f) = \lambda v(f)$$

が成り立つことを示せ．

問題８: $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ を単位球面とし，C^∞ 関数 $f : S^n \to \mathbf{R}$ を $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1}$ で定義する．関数 f の微分 $df_a : T_aS^n \to \mathbf{R}$ が零になるような $a \in S^n$ を決定せよ．

以上．