幾何問答

北海道大学理学研究科・空間構造学講座
石川 剛郎 (いしかわ ごうお, Goo Ishikawa, Go-o Ishikawa)

問． この「幾何問答」とは何ですか？どんなことが書いてあるのですか？

答． 幾何に関する問答集です．この問答は，２００１年度前期に北大で行った講義「平面幾何の旅—古典幾何学から現代幾何学へ—」(科学技術の世界) での，賢明なる学生諸君からの質問の一部と，それに関する私の回答を記録したものです．ここに載せられた新鮮な質問たちは，幾何学に関する認識を深めるのに役立つのではないかと考え，その抄録をここに公開することにしました．ただし，質問は原文ではなく，かなり書き直している部分があることをご承知おきください．したがって，この問答集の内容のおもしろさは，ひとえに学生諸君の功績であり，文章・内容の誤まりは，すべて私の責任ということになります．参考のため，講義のシラバスも挙げておきます．

【 平面幾何の旅—古典幾何学から現代幾何学へ—】 (科学技術の世界)

担当教官 石川 剛郎(いしかわ・ごうお) ２００１年４月

●この講義では,「平面幾何」の名所旧跡を皆さんと一緒に旅します．親しみやすい素材を通して，本当の学問の醍醐味を味わってください．

●平面幾何，とくに「ユークリッド幾何」は，あらゆる学問の雛形であり，現代の科学技術の生みの親と言っても過言ではありません．永い間，知識人が持つべき当然の教養として高等教育で教えられ，論理的センスを養うのに重宝されてきた歴史があります．最近は，この人類の貴重な遺産もあまり省みられないようで，目先の実利的学問を修得して，競争社会をとりあえず生き抜いていくことが優先されている傾向があるようです．しかし，この変化の激しい現代社会においてこそ，永い歴史を生き抜いてきた学問にふれてみることも必要であると考えます.

●旅程表.

１．オリエンテーション／講義内容の概要／成績評価の説明／

２．ユークリッド幾何 (古代への旅) ／３角形の５心／平面幾何の有名な定理／

３．射影幾何（近代への旅）／デザルグの定理／パスカルの定理など／

４．平面曲線のトポロジー（現代への旅）／平面折れ線／ホイットニーの定理／

５．未来への旅／２１世紀の幾何学の展望／

●講義中に適宜プリントを配ります．参考書としては，次を挙げておきます.

小平邦彦著「幾何への誘い」岩波現代文庫，G7，岩波書店．(古代)

安藤清，佐藤敏明著「初等幾何学」新数学入門シリーズ４，森北出版．(古代)

郡敏昭著「射影平面の幾何」遊星社．(近代)

【 評価方法について 】

●講義に関する**質問書**を皆さんに書いてもらい，その場で回収して，次の回にその質問に答える予定です．質問書には，講義内容に関連した**質問**とその**補足説明** (１００字以上) を分けて書いてください.

●質問・補足説明は，自分の発想，自分の言葉で表現してください．酷似した質問・補足説明が複数あったら，**それらはすべて零点とします**.

●成績は，質問書の内容とレポートをもとにつける予定です．したがって，普段の講義に関する関心度，理解度が大切になるかと思います.

●寄せられた貴重な質問には，プリントの形で，できるかぎり回答する予定です．質問した人の名前は公表しませんが，質問内容は公開させて頂きます．皆さんの質問で講義が活性化されます．でも，すべての質問には答えられないかもしれないので，答えが見つからないときは，直接質問に来てください.

●質問例 (単なる例示で，理想的な質問ではありません．ともかく，皆さんの素直な質問を期待しています．)

質問：メネラウスの定理で，$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=-1$ というのが出てきますが，長さの比がマイナスになるのは変な気がします.

補足説明：長さは 0 以上の数だから，その比も当然 0 以上の数になると思います．それに，高校で習ったときは，$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$ となっていた気がします.

質問：参考書○○の××ページの定理△△の証明がわかりません.

補足説明：★★★のところまではなんとかわかるのですが，その次の部分がさっぱりわかりません．この証明は本当に正しいのでしょうか？(後略)

第１回問答

問． ユークリッド幾何とはそもそも何ですか？「幾何」というものが，単なる「図形に関するもの」という認識しかないのですが.

答． こんにちは．さて，幾何は図形に関するもの，という点は正しい認識だと思います．でも，「図形とは何か」ということは，それほど明らかではありません．私は，複雑なことがらの仕組みを理解することがすなわち「図形化」であると思うので，幾何は世界を認識するための重要な方法と考えています．それはともかくとして，ユークリッド幾何学は,「図形を長さや角度を使って調べる学問」であると言えます．そして，その調べ方が，それ以後に生まれてきた新しい学問の雛形になったという意味あいがあります.

問． 幾何学はなぜ生まれたのですか？

答． 幾何学 (geometry) は，測量から生まれたと言われています.

問． 三角比と幾何学は違うのですか？

答． 三角比は幾何学の起源です.

問． ユークリッドというのはどういう人ですか？「ユークリッドの互除法」というのを思いだすのですが，ユークリッドは幾何だけでなく，代数学も研究していたのですか？

答． 「幾何学原論」の著者です．ユークリッドについては詳しいことは知られていません．謎の人です．個人名ではなく集団の名前であるという説さえあります．ところで，幾何に比べると，代数学ができたのは比較的新しく，ユークリッドの時代には，代数学はありませんでした．歴史的にみると，代数学に属する事柄でも，あくまで幾何学として研究していたと推測できます.

問． ユークリッド幾何学と非ユークリッド幾何学の違いについて詳しく説明してほしいです.

答． ユークリッド幾何における (他の公理はそのままで) 平行線の公理を除外して，別の公理をもとにできる幾何学を非ユークリッド幾何と言います．たとえば，双曲面上の幾何や球面幾何です．１点を通り，１直線に平行な直線が無限にあったり，１つも無かったりします．(射影幾何のある意味では非ユークリッド幾何ですが，射影幾何では，長さの概念もなくなります．)

問． 球面を対象とした幾何学などはあるのでしょうか？

答． あります．球面幾何学では，直線に代わる対象は「測地線」つまり「大円」です．このとき，１つの大円に対し，１点を通る大円は無数にありますね.

問． ユークリッド幾何は，近代の射影幾何や位相幾何になると適用できなくなるのでしょうか？

答． 適用できます．ユークリッド幾何の定理は，永遠に正しいのは確かです．ただし，考え方，ものの見方に発展があって射影幾何や位相幾何が生まれたので，発想自体が異なると言えます．また，時代が下れば，幾何が扱う世界も当然拡がっていきます．したがって，扱う対象が違えば，適用できない，あるいは適用しても無意味な場合ももちろん生じます.

問． 何かの本で「射影幾何では平行線の交わる」といったような文句を読んだ気がするのですが，本当ですか？

答． 本当です．ところで北海道内を旅行すると，広々とした景色がひろがり,「平行線が交わる」と実感できるかなと思います.

問． ユークリッド幾何，射影幾何などの分類は，学問の成熟度によっての分類なのでしょうか？もしくはそれぞれの名称の幾何学に特有の方法論などが存在し，それぞれが特有の世界を持っているのでしょうか？

答． 成熟度というよりは，方法論と対象の違いだと思います．ユークリッド幾何は十分成熟し

た (成熟しすぎた?) 学問です.

問． リーマン幾何学とはどういうものですか？

答． 曲がった曲面や多様体などを扱う幾何学です.「リーマン」という数学者が作りました．アインシュタインがリーマン幾何を使って，一般相対性理論を研究したことは有名です.

問． トポロジーとは具体的には，どのような数学なのでしょうか？位相幾何学には，幾何学からのアプローチと，集合論的なアプローチの仕方があるように思います.

答． トポロジー (Topology) という言葉は,「位相」あるいは「位相構造」という概念の名前に使う場合と，その位相という概念に基づいて図形を研究する学問の名前に使います．後者の意味では,「位相幾何学 (いそうきかがく)」と訳されます．一番わかりやすい説明は,「位相幾何学とは，メビウスの帯やクラインの壷などを研究する幾何学」でしょうか.「トポロジー入門」という本が店頭に並んでいる場合，それは「位相入門」なのか「位相幾何学入門」なのかは表題だけからはわかりませんが，質問のように２種類あることになります.

問． トポロジーの応用価値とは何ですか？

答． 初めはあまり応用のことは考慮されずに，純粋に数学的に研究され発展してきたのですが,最近，グラフ理論，DNA の結び目，タンパク質の構造，素粒子論やゲージ理論，物性理論，などなど多くの分野に応用されるようになっています．今後はますます応用が拡がっていくことでしょう.「三年寝太郎」という話がありますが，何だか役に立たないなあ，というものが意外に役に立つようになるという例はたくさんあります.

問． どうすれば幾何学がわかるようになりますか？

答． えーと，それがわかったら私に教えてください．それはともかく，問題を図を使って解いた経験があれば，もう幾何学がわかったと言えるかも知れません.

問． ３次元までは図示できますが，４次元というものにも幾何の知識は使えますか？

答． もちろん使えます．人間には幸い「類推する」「拡張する」という能力があるので，実際に目に見えなくても，想像することができます．そして，いろいろな結論を，４次元以上の図形に対しても証明することができます．人間の能力というのはすばらしいものです．そもそも３次元を図示すると言っても，実際は平面上に図を書いて，それから３次元を類推しているので，それと同じことです.

問． 自然界に存在する図形について考えることがあるのはわかりますが，現実には存在しないようなことまで数学では考えられていると思います.

答． なるほど．でも，考えてみると,「自然界に存在する」かどうかは難しい問題ですね．たとえば，平面幾何の舞台である「平面」ですが，自然界に存在するでしょうか？単純に考えて，無限に拡がる平面は，自然界に存在しませんね．所詮，人間が想像したものですね．では，平面の一部分でも自然界に存在するでしょうか？本当に平らな面は存在しないでしょうね．所詮，人間の想像力のたまものですね．数字もそうです．どこにも「１」は存在しませんね．街の中で，１や２が行列していたらこわいです．数字も想像物ですね．(書いてある数字そのものではなく，数という概念のことです)．現実に存在するかどうか，ということは，いかに現実を詳しく観察しているかによるのであって，一見，存在しないようなものでも，現実を理解するのに必要なものなら研究する価値があるわけです.

問． 高校では，幾何は教わりませんでした．この講義についていけるでしょうか？大丈夫でしょうか？

答． 大丈夫です．中学で習った程度の知識で十分です．それより皆さんに期待しているのは,

「知的好奇心」と「論理的な考え方」と「自由な発想」です．

問． 公理，定理，定義のちがいが解りません．

答． 公理は理論の前提，定義は用語の説明，定理は公理から論理的に導かれる結論です．

問． 僕の学校では，入試に出ないからとかいう，わけのわからない理由で幾何の授業をやらなかったんです．入試に出るとか出ないとか，そういうんじゃないだろうと思って，自分で少しはやったんですが，完璧だといえる程ではありません．

答． そうでしたか．それだけのやる気があれば万全です．ただし，この講義は，ゆっくり進む予定なので，物足りない人がでてくるかもしれません．ところで，まあ，入試がある以上仕方ないのでしょうが，試験に出るから勉強するというのは，本末転倒だし発想が少し不健全ですよね．

問． 高校の数学の時間には,「入試に出ない」という教師の一言で平面幾何が飛ばされました．仕方がないので，自分で参考書を読んで，定理だけ (証明はできない) は暗記しました．教科書に載っているのですから，重要な学問であるはずです．自分の見えないところで重要な役割を果たしているのならば，せひ知りたいです．

答． ユークリッド幾何は，すべての学問の雛形であり，科学技術の基本なので重要です．もちろん，平面幾何がわかったから，何でもわかったことになる，というわけではありませんが,「わかる能力」を確実に高めます．考える能力と平面幾何の理解力は比例すると考えられます．世の中，問題と解決の連続です．平面幾何を学びことを通して，論理的に推論したり，ああでもないこうでもないと集中して考えて問題を解決する実感が味わえます．このように，自分の見えないところで重要な役割を果たします．

問． 高校の時は授業では平面幾何は扱わず，なぜなのか先生に聞くと,「図形の問題は，座標や方程式や位置ベクトルなどのほうが拡張性があるので，平面幾何を使うのはあまりオススメできない」と言われました．平面幾何の長所を教えてください．

答． この先生の言っている平面幾何は「古典的な平面幾何」を指しているので，そこから後で発展した座標や方程式や位置ベクトルの方が拡張性，一般性があるというのは確かですね．たとえると,「そろばん」を使って計算することと「電卓」を使って計算することの違い，あるいは,「手計算」と「コンピュータ計算」の違いのようです．電卓を使えば計算は早いですが，(慣れれば，そろばんの方が早いかもしれませんが)，やはり，位取りなどの計算の仕組みをわかるためには，そろばんを勉強するのがよい，と言われています．要はバランスの問題ですが，平面幾何には，歴史的に最初に形づけられただけあって，図形に根ざした考え方が身につき，理解しやすさ，発想の自然さ，などの長所があります．

問． 図形問題を解く上で，問題図に自分で「補助線」を引いたり，といったことが全くできませんでした．何かコツのようなものがあるのでしょうか？中学校の頃ぐらいから数学の図形問題に苦手意識を持ち始めました．

答． あまり気にしなくてもよいです．でも，もし「発見のよろこび」を味わいときは，とりあえず幾何の問題を何でもよいから選んで，暇なときに時間をかけて考えて，わからなくても解答を見ないで辛抱して，そうですね，一週間ほど考えつづければ必ず解けます．このとき，自分で解くということが大切で，自分で解決するという体験をすれば，その一週間で世界が変わるかも知れません．

問． 高校時代，幾何の授業がなかったので，大学に行って勉強するのを楽しみにしていました．

答． そう言ってもらえると教えがいがあります．ただし，この講義では，幾何の一部分しか紹介できないと思うので，万一つまらないと思っても，幾何がつまらない，とは思わないでほしい

なあというのが私の願いです.

問． 平面幾何は他の分野と異なる数学なのでしょうか？

答． とくに異なるということはないと思います．数学で必要な論理的能力を身に付け，定理やその証明を発見する喜びを味わうのに最適な分野だと思います.

問． ２次元ベクトルも平面幾何の分野に入りますか？

答． 平面上の幾何なので，もちろん入ります．ただし，ベクトルという考え方ができたのは，せいぜい１８世紀ぐらいなので，それ以前は，平面幾何の問題はベクトルを使わないで考えられていたことになります.

問． 僕は北見出身なんですが，北見の農家のおっさんが，任意の角を３等分にするという，あのできないって証明されている問題は解けるとか言って，変な本まで発売してたのですが，その後がどうなったかわかりません．何か知りませんか？

答． 知りません．まあ，この手の「変人」はたくさんいます．家族の人は大変でしょうが，好きなことができて本人がしあわせなら，良いのではないかなとも思います．やりたいことをやらずに我慢して，不満ばかり言っている人が世の中には多いですが，そういう人たちよりは，私はそのおじさんを尊敬したくなります.

問． 角の３等分線は，コンパスと定規では引けない理由 (証明) を教えてください.「倍の体積の立方体の作図」「円と同面積の正方形の作図」「角の３等分線の作図」が不可能であると証明されたようですが，その証明をわかりやすく説明してください.

答． たとえば，H. デリー著，根上訳「数学１００の勝利」平面図形の問題，シュプリンガー東京，という本に書いてあります．他の啓蒙書にも載っています.

問． 正多面体というのは限られた数しかないと聞いたことがあります.

答． プラトンの定理ですね.「オイラー標数」を考えるとすぐ導かれますが，この講義のテーマではないので，ここでは説明しません.

問． 「黄金比」$1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ というのは，どうやって決まったのでしょうか？

答． フィボナッチ数列 $1,1,2,3,5,8,13,\ldots$ と関係して決まる数です．でもそれがどうして美しく感じる割合なのかは謎ですね.

問． 中学，高校と，点とは面積のないもので，線とは面積のない点の集合で長さのみをもつものと習いましたが，平面とは面積を持たない線の集合であるとも習いました．面積のないものが集まることによって面積が生まれるという一見矛盾した理論が未だによく分かりません.

答． 面積が 0 のものを可算無限個あわせても，やはり面積は 0 です．でも，連続無限個あわされば，面積が生じるということです.

問． 円の面積と周の正確な値は何ですか？円周率はどうやって求めているのですか？

答． π です．無理数なので，有限小数では求まりません．その近似値を求めるいろいろな式があります．たとえば，アークタンジェントを使う方法とか，連分数を使う方法があります．詳しくは，たとえば，名著，小林昭七著「円の数学」裳華房，を読むとよいと思います.

問． 多くの線で区切られた図形を４色で塗り分けられるなら，それは本当にどんな図形でも通用するのか，証明があるならそれを知りたいです.

答． 四色問題ですね．証明は計算機を使って「シラミつぶし」によるもので，ここでは再現できません．(興味深い証明であるとは言い難いと思います).

問． 幾何学というのは，なぜこのような名前に命名されたのですか？

答. 英語の geometry は地球と関係する "geo" から来ている言葉でしょう.「幾何」ということばは中国から来たことばですが，語源は知りません．(この件については，第２回問答を参照してください).

問. 幾何学の種類はどのくらいあるのですか？また，それらはどんな事象に対し使われいるのですか？さらに，北大ではどれが扱われているのですか？

答. 分け方に依るし，応用のされ方も千差万別です．現在活発に研究されている分野を大きく分けると，位相幾何と微分幾何と代数幾何ということになると思いますが，現在は，これらを組み合わせた研究，学際的な研究が盛んです．北大は幾何学の国際的中心の１つで，どの分野も活発に研究されています.

問. ユークリッドの「原論」自体を読んでみたいのですが，読んで効果がどれくらいあるのですか？

答. あまり効果はないと思います．私も持っていますが，実は，眺めるだけで，ちゃんと読んだことはありません.

問. なぜ時計は６０進法なのですか？なぜ１回転は３６０°なのですか？僕の予想だと３６０は約数が多いから選ばれたのだと思います.

答. その通りだと思います.

問. 掛け算で，(マイナス) × (マイナス) = (プラス) になる，という必然性がわかりません.

答. 数直線を「ひっくり返す」という操作が -1 を掛けるということと見なされ，それを２回続けると何もしないこと，つまり 1 を掛けることになるので，$(-1) \times (-1) = 1$ は自然ですね.

問. 平面幾何の様々な定理や法則というのは，どんなきっかけで発見されたのでしょうか？ピタゴラスの定理は，ピタゴラスが床のタイルの形を見たときに偶然思いついたものだと聞きました．数学の分野において偉大な発見というのはどのようにして生まれたのでしょうか？

答. いろいろあるでしょうが，やはり最初は偶然でしょう．でも,「思いつき」は何も努力していなければ絶対得られないもので，普段，努力して追い求めていて，そして気分を変えて，別のことをやっているときに得られることが多いようです.

問. 平面幾何をやるにあたって図学の道具は必要でしょうか？

答. 必要ありません．フリーハンドで十分です．強いて言えば，定規は役に立ちます.

問. 学習要領３割削減などに伴い，子供さえ幾何学から離れてしまうのは非常に恐ろしい.

答. 同感です.

問. この授業を通して，学生に何を学んでほしいと考えていますか？教える立場の人間として，生徒に平面幾何というものを教える本当の意義とは何ですか？

答. 平面幾何の講義を通じて，考える力を (一般論ではなく，具体的な方法で) 身に付けてほしいと考えています．もちろん幾何の定理自体も重要ですが，その結果を得るまでのプロセスや，発想も非常に大事だと思います.

問. この講義を履修することによってどのような能力を身に付けることができるのですか？古代の学問であるので，新しい発見はできないと思いますが，それが現代の学問をするのに役立ちますか？

答. 何をもって役に立つというかは問題ですが，たとえば，科学技術の世界で良い仕事をした人の多くが，平面幾何の愛好者であるようです．独創性と何か関連があるのかも知れません.

問. 幾何学の未来には興味があります．現代幾何学はどこに向かっているのですか？未来の幾何学とは，いったいどのようなものでしょうか？

答． この講義を通して，一緒に考えていきましょう．

問． 幾何の目的のようなものはありますか？幾何学は，自然科学の中から，何を最終的な目標として生まれたかが知りたいです．幾何の魅力は何でしょうか？

答． 酔ったときに私が言うセリフに「幾何学は後ろ向きに世界観を語る」というものがあります．前向きの学問ではないわけです．でもこれは否定的な評価ではなく，事実を表面的に手早く知る，という態度とは逆に，その事実の背景に何があるか，ということを解明し，説明するのが幾何学の役目であるということです．数学や物理などの分野は，成熟するとしばしば「幾何学化される」といわれます．

問． どうしてあらゆる学問の雛形と言われる「ユークリッド幾何」は教えられなくなったのですか？プリントに書いてあるように目先の実利主義が競争社会を生き抜くためという理由だけで現代の科学技術の生みの親と言っても過言ではないユークリッド幾何が省みられなくなったというのは説明を聞く限り納得はできません．それだけ永い歴史を生き抜いてきたものが省みられなくなったのは，何か問題があったのですか？

答． 中世のユークリッド幾何の研究者に問題があったのだと思います．ユークリッド幾何はすばらしいが，そのすでに出来上がった学問を後生大事に守って，新しい発想で研究することをしなかったことが原因で，人々から省みられなくなっていったと推測されます．ところで，数学は，古代ギリシャの時代に盛んに研究されましたが，ローマ時代になると，実用的なものに関心が移って数学が衰退したそうです．その数学がなぜ現代に生き残って，私たちが学べるのか．それはクレオパトラが学問好きで，ギリシャ時代の書物を収集し，アレクサンドリアに立派な図書館を作り，そのおかげで，さまざまな戦乱を生き延びて，現代に残っているという説があります．今私たちが学んでいることのどれが将来まで生き残っていくのでしょうか？楽しみですね．ではまた．

第２回問答

問．「三角形の五心」(重心，中心，垂心，内心，傍心) の現代社会における意義は何ですか？何のために求めるのかわかりません．

答．こんにちは．花粉症で苦しい日々です．さて，回答ですが，三角形の五心が現代社会で重要であると主張するつもりは毛頭ありません．じゃあ，重要でないのなら，なぜそれを教えるのか？それは，この講義「平面幾何の旅」の教材 (訪問先) として適当であると考えるからです．平面幾何や射影幾何の主要な定理を見てみると，３直線が１点で交わるかどうか (共点)，３点が１直線上にあるかどうか (共線) という結論のものが多いのに気付きます．その一番簡単な例が三角形の五心の存在定理です．まず，三角形の五心という，皆さんになじみ深い教材を通して，これから説明していく平面幾何の定理や証明の仕方に慣れてもらおう，ウォーミングアップをしてもらおうという企画です．寄席で言うと，三角形の五心は，いわば前座です．「じゅげむじゅげむで口ならし」の段階です．それでは，平面幾何のようなすぐには役に立ちそうもない基本的なことをなぜ講義しているのか？もちろん，実用に比較的近い講義もたくさんあり，皆さんもそれらを受講していると思います．もちろん結構なことですが，ただし，「今日役に立つことが明日は役に立たなくなる」という変化の激しい現代社会では，その変化を追いかけることも大切ですが，その変化に流されない基礎的な思考力，判断力，コミュニケーション能力を身につけることは，より重要ですね．日常生活にすぐに役に立つこと，たとえば，インターネットの検索の仕方とか，コンビニでの買い物の仕方とか，キャッシュディスペンサーでの現金のおろし方を教えた方が有益でしょうか？それは有益ですが，そんなことは誰でもすぐにわかることなので，わざわざ大学で教えることはないですね．一方，日常生活で役に立つが，誰にもすぐにはわからないこと，たとえば，株で確実に儲ける方法とか，絶対にリストラされない方法とか，必ず幸せになる方法などは，誰も教えることはできません．自分で考えるしかありません．教えられることがあるとすれば，それは，皆さんが，視野を広げ，自分でものごとを考える能力を高め，自信と誇りを持って生きていく，その手掛かりになるかもしれない事だけです．この講義のような「ほのぼの数学」の授業を受講している皆さんには，心に十分余裕があるので，この講義で説明しているような基本的なことがらの意義やおもしろさを理解してもらえると期待しています．

問．３直線が１点で交わるのは，特別な場合というより，あまり特別でないときではないですか？

答．何が特別か，ということは問題ですが，皆さんが適当に直線を２本引くとすると，偶然平行でない限り，１点で交わると思います．そして，もう１本直線を引くと，だいたいその交点は通らないはずです．つまり，３直線が１点で交わること (共点という状態) は普通起きないことなので，特別と言ったわけです．

問．公理は証明できないのですか？公理を裏付けるものはないのですか？公理は本当に正しいのでしょうか？「平行線の公理」は何をもってそうだと言い切れるのですか？

答．公理は証明できません．というより証明しません．公理は認めるものです．「公理主義」は，公理を「正しい」ということにして，それを出発点としよう，という発想です．この発想が古代ギリシャ数学の神髄です．

問．公理はどこから出て来たのですか？

答．いろいろな経験から帰納的に導かれたものと言えます．演繹的に導かれたものではありません．

問．公理から全ての定理を証明することができるのですか？定理とはいくつぐらいあるものな

のですか？

答． 証明できるものを定理とよびます．定理の数を数えることはできません．

問． まだ発見されていない定理はあるのですか？

答． 発見されていないので，あるのかないのかわかりませんが，まだまだあると考える方が妥当であると思います．

問． 定理は公理にすべて基づいているのですか？

答． そうです．用語の定義 (たとえば直角の定義など) は，定理を簡潔に述べたり，推論をやりやすくするためだけものです．さかのぼれば，定理は，公理に出てくるような直線とか長さなどの用語だけで述べられ，公理だけから論理的に導かれるということです．そういう意味で他のことは使われません．もちろん，用語の定義がないと，定理はものすごく長くなるでしょう．定理の証明をすることも実際は不可能になるでしょう．でも原理的には公理だけに基づいています．

問． 図形の証明問題は，そのつど公理からの証明が必要不可欠なのですか？

答． 問われれば，公理にさかのぼれるということが大事です．実際は，公理から基本的な定理を証明しておいて，それらの定理を使って証明することになります．このことは他の数学の分野でも同じです．

問． ある定理を証明するのに，他の定理を使ってもよいのですか？

答． よいです．他の定理が，公理から導かれるか，公理から導かれる定理から導かれれば，その証明をつないでいけば，その定理に関して，公理からの直接証明が書けるからです．

問． 中学のときの図形の授業で「定理とは定義から導かれる」と教えられました．

答． たぶん，公理は大前提として使って，その上で定義にしたがって証明しなければいけない，という意図でしょう．中学生の段階では，たとえ公理をのべても，当たり前すぎてピンとこないだろうから，通常，公理には触れません．

問． 平面幾何では証明と言うことは必要なのですか？作図でわかることを証明する必要がありますか？

答． 必要があります．作図をすることは大切なことですが，作図をしてわかることは，あくまで，その図に対してだけです．他の場合について，一般的に成り立つことを言うには，証明する必要があります．

問． 「図から明らか」という書き方では，数学の証明法としては説得力がないですか？

答． 残念ながらありません．厳密な証明をしたあとで，それをわかりやすく人に伝える場合は，図で納得してもらうというのは有用な方法ですが．

問． ニワトリが先か，タマゴが先か，ということなんですが，数学の言葉はどれが先にあって，それによって定義されるのはどれか，というのが明確にわかりません．

答． なかなか難しいですよね．気になったときは，定義をさかのぼりながら実際に書き下して整理していくと良いと思います．

問． 平面幾何の公理「$\triangle ABC$ について $AB < AC + CB$ 」は他の公理を用いて証明できないのですか？これは公理というより，定理のように聞こえます．

答． できません．いくつかの公理を基に定理を導いていく場合，その公理のあつまりを「公理系」といいます．公理系はお互いに矛盾してはいけません．そりゃそうです．このとき，公理系は「無矛盾」であるといいます．また，公理系は少ない方がよいので，他の公理から導かれる定理が，公理系に入っていたらよろしくありません．どれも他の定理から導かれない公理からできている無駄のない公理系を「独立」であるといいます．**公理系は無矛盾で独立であることが要請**

されます．ところで後世に「学問の体系」が作られる場合，多くはユークリッド幾何の体系を (不完全ながら) 模倣していることが多いようです．

問． 公理「$\triangle ABC$ について $AB < AC + CB$ 」は，距離の公理の三角不等式そのものになってしまいます．

答． そうです．三角不等式です.「距離」という概念は，この公理から抽出されたと言えます．

問． 平面幾何の分野ででてくるユークリッドさんらの定理を生み出した時の証明を見たいです．

答． ユークリッドの「幾何学原論」を眺めてみるとよいと思います．

問． 平面ユークリッド幾何の公理はどんな幾何の証明にも通用する万能のものなのですか？

答． ちがいます．平面ユークリッド幾何の証明だけに通用します．でも，**公理という大前提から定理を導くという精神は，幾何に限らず，どんな学問にも有用です**．

問． 公理「３角形は３つの角の大きさと３つの辺の長さを変えないでその位置を変えることができる」の中で,「位置を変えることができる」という意味ですが，同一平面においてですか，それとも違う平面においてですか？

答． 何が同じで何が違うか，というのは難しいですが，同一平面において議論する，というのが平面ユークリッド幾何であると考えられます．立体幾何では，いくつかの平面を空間のなかで考えます．

問． 幾何は初めてですが，平面幾何の１番目の公理「３角形は３つの角の大きさと３つの辺の長さを変えないでその位置を変えることができる」が，いったい何を言いたいのかさっぱりわかりません．国語力が低下しているのでしょうか？

答． 動かすことができる，という意味です．現代数学を知っている人には，かえって奇異な表現に見えると思います．小平邦彦さんは，平面幾何は「図形の科学」であると言っています．現代的な目でみると，厳密性に欠けると考えられるかも知れませんが，自分で論理を組みたてて前提から結論を推論していくという経験をするためには，十分に厳密であると言えます．ところで，**国語力がないと数学はできません**．皆さんは大丈夫と思いますが，国語力 (自分の考えを人に上手に伝える能力) は日頃から鍛えておきましょう．

問． 三角形の内角の和が 180 °になるのはなぜですか？

答． 三角形の１頂点を通り，対辺に平行な直線を引き,「２直線は平行ならば，その２直線の錯角が等しい」という定理を使うとすぐに証明できます．

問． なぜ 90 度を $\angle R$ と書くのですか？

答． 直角は英語で right angle, その頭文字を取っています．

問． 背理法で証明されたものは本当に正しいのですか？

答． 背理法は論理的に正しい方法です．つまり,「P ならば Q である」という命題が真であることを証明するために，P であり，かつ，Q でない，と仮定して矛盾を導く方法ですね．P であり，かつ，Q でない，と仮定して矛盾が出るということは，P であり，かつ，Q でない，という場合はない，ということですね．つまり，P であれば，必ず Q でなければならない，つまり,「P ならば Q」が真であることになりますね．

問． 背理法って数学というより文系の分野っぽいですね．

答． そうですか．数学自体がいわゆる文系的な要素を持っていますね．他の自然科学もそうかもしれません．量子力学で有名なハイゼンベルグのエッセイ「部分と全体」(山崎和夫訳，みすず書房) の冒頭に「科学は人間によってつくられるものであります」とあります．現在は，文系の分野でも理系のセンスが必要とされています．そもそも，私は理系，文系の区別は本質的なも

のであるとは思っていません．

問． 三角形の４心 (内心，重心，外心，垂心) は，正三角形以外で一致することがあるのでしょうか？

答． ありません．内心と外心が一致すれば正三角形です．すぐ証明できます．

問． ユークリッド平面幾何と同様のものが空間についてもあるのでしょうか？

答． あります．ユークリッドの幾何学原論の後半の部分に，立体幾何が書いてあります．

問． 今まで学んできた命題には，真の命題と偽の命題があったのですが，今日の講義では，命題とは「軽い定理」だという説明がありました．

答． 数学で使う「命題」という用語には２つの意味があります．１つは，論理学でいう命題で，真偽が判定できる主張を意味します．もう１つは，定理と同じ意味で使います．つまり「正しい命題」のことです．普通は，定理は重要なものを言い，それほど重要ではないとか，重要な定理を導くための途中の定理を命題ということがあります．似た言葉に「補題」とか「補助定理」という言葉もあります．

問． 逆の命題が成り立たないのはどういう場合ですか？

答． 多くの場合に成り立ちません．たとえば,「犬は哺乳類である」の逆「哺乳類は犬である」は正しくありませんね．

問． 平面幾何は現実の世界からできた学問だと思いますが，現実社会の法則で幾何の世界で証明されていないものはないのですか？

答． そもそも現実社会の法則を証明することは不可能です．たとえば,「平面」や「直線」というものは現実には存在しませんね．現実は複雑なので，何らかの「モデル」を構成して，いくつかの公理 (仮説という場合もあります) をもとに論理的に導かれる定理 (結論) を，実験，フィールドワーク等のデータと比較して，また仮説を修正して，結論をデータと比較する，このくり返し，というのが学問の基本的な姿です．現実からできたのは確かですが，現実のことを証明しているとは考えないで，あくまで「モデル」の中のことである，というのが妥当と思います．

問． なぜ「非ユークリッド幾何」が生まれたのですか？

答． 歴史的には,「平行線の公理」を他の公理から導こうとして，挫折した後で生まれています．

問． 先日，微分積分学の授業のときに，三角形の内角の和が 180 °になるのは，いま僕の生きている空間だけだとおっしゃっていました．

答． たとえば，平面ではなく，球面の上では,「三角形」の内角の和は 180 °より大きくなります．

問． 前回の質問の中に，平面とは面積をもたない直線の集合なのに平面が面積を持つのがおかしいというのがありました．また，その答として，連続無限個あわされば面積が生じるということになっていますが，僕はどうしてもこの考え方が納得できません．完全な 0 に ∞ をかけても 0 だからおかしいと思うのです．$0 \times \infty = 0$ は確実に正しいと思います．

答． ∞ は数ではないので，$0 \times \infty$ という計算自体に意味がありません．それに，よく考えてみると，面積とは何かという定義がはっきりしていないので，このような計算と面積の話とは関係がありませんから，あくまで「たとえ話」としてしか結びつきませんね．このように，面積とは何かということを曖昧にしているために生じてしまったジレンマと言えます．

問． 円の面積や周は計測できないのですか？

答． 「計測する」というのは，どういう意味がはっきりしないのですが，実際に計ると，当然「誤差」が出ますね．

問． 円は特別な曲線ですか？

答． 特別な曲線です.「ある点 (中心) から距離が一定の点の軌跡」という特別な性質 (これが円の定義) を持ちます.

問． 幾何学は，工学とくに機械へ応用されますか？

答． 応用されます．たとえば，ロボット工学や制御理論に盛んに応用されています.

問． 角の３等分ができたらフィールズ賞がもらえますか？

答． もらえません．そもそも不可能なことが証明されていますが，たとえ，その種のことを解決しても，たぶん無理でしょう．それは，現代では，その問題そのものは重要ではないと考えられているからです．ただ解けただけでは,「ああそうですか」で終わります．ただし，もしその問題自体あるいは，その問題を解決する方法が，他の数学の分野や，それ以外の分野へ大きな影響を持つと判明した場合には，その問題の解決は重要な業績と考えられます.

問． 中国語で「幾何」と書くのは，geo の音をとったためで,「ジホ」と読むらしいです.

答． ありがとう．前回の回答で,「幾何学というのは，なぜこのような名前に命名されたのですか？」という質問に対し,「英語の geometry は地球と関係する ”geo” から来ている言葉でしょう.「幾何」ということばは中国から来たことばですが，語源は知りません.」と答えたのですが，その回答がさっそく寄せられました．対話型の講義をしているかいがあります．(後日，同僚の J さんから，中国に派遣されていた宣教師のマテオリッチが命名したと教わりました．また，中国の長春から北大を訪れている P さんに確認したところ，はやり「幾何」は「ジホ」と読むとのことです．)

問． 現在私達のやっている問題は，もしかしたらすべて「平行線の公理」のようなもので，未来の幾何学への準備なのではないでしょうか？

答． そうかも知れませんし，そうでないかも知れません．誰もわからないから，手を抜かずにがんばるしかないわけです．それが研究というものです．研究の極意「見逃さない，手を抜かない，こだわらない，あきらめない」.

問． 現在幾何学にたずさわっている人は何をしているのですか？

答． いろいろな幾何学の体系 (微分幾何，位相幾何，代数幾何など) で，定理を見つけ，定理を証明しようとがんばっています．そして，新しい幾何学の体系を作ろうとしています.

問． 難しい質問をしようとすればするほど基本的な事項に帰結していく様な気がします.

答． その通りです．そのことが皆さんにわかってもらえたら，質問書を書いてもらっている意義があるというものです.

問． 授業の内容が理解できた場合，質問書に書けることが少なくなると思うのですが.

答． 違います．そう考えがちなのはわかりますが，本当に内容が理解できたらなら，当然，次々に疑問がわいてきますね．質問がない，というのは，講義の内容が十分に理解できていない証拠です．良い質問が書けるように，良く勉強してください．ではまた.

第３回問答

問． 数学は，どれも確かなものから広げていって，定理などを証明するものだと思いますが，定義できないもの，つまり無定義語をもとにして証明していったものは，すべて机上の空論になってしまうと思うのですが，よろしいのですか？

答． こんにちは．ゴールデンウィークは近所のユニクロに行きました．さて回答ですが，よろしいのです．根本的にものごとを考えるとそういうことになります．１つの用語を定義するには，別の用語を使う，その用語を定義するには，また別の用語を使う，とさかのぼっていくと，循環論法におちいらない限り，出発点になる用語，すなわち，無定義語がどうしても必要になることが納得できると思います．すべての学問は，机上の空論です．机上の空論というのは，学問をけなす言葉ではなく，理想です．もちろん，それを現実と比較するという態度を忘れてはいけませんが．たとえると，太陽系 (銀河系でもよい) はそれ自身で安定していることが大切で，どこか他の場所から「吊るされている」必要はないということです．

問． 本当に点や線は無定義語なんですか？以前，点は大きさをもたない位置を表すものであり，線とは長さと位置を表すものだと聞きました．

答． では,「大きさ」とは何でしょう？「位置」とは？「長さ」は？と定義していくには，別の用語が必要になります.「どうどう巡り」をしない限り，用語についても，何か出発点が必要になりますね．いくつかの無定義語がどうしても必要になるわけです．もちろん，無定義語として，どれを選ぶか，という自由度はありますが．

問． 非ユークリッド幾何で，球面の円周の部分が直線だということ自体が，直線としての定義に反しているので納得いきません．

答． ユークリッド幾何では,「直線」に定義はありません．もちろん，それでは，愛想がないので，初等幾何の本では説明がついている場合が多いですが，とにかく，大事なのは，２点を通る直線がただ１つ存在する，などといった公理が成り立つかどうか，ということです．ヒルベルトという大数学者がかつて,「点」の代わりに「机」，直線の代わりに「椅子」という言葉を使っても幾何学は成立する，と言ったのは有名な話です．(もちろんそれでは直感が発揮できなくてつまらないですが)．

問． 球面上の三角形の内角の和が 180 °より大きくなるとはどういうことですか？球面上の三角形というのは直線ではなく曲線だと思います．

答． この場合,「直線」とは「大円」，つまり最短経路を意味します．

問． 平行線の公理を他から導こうとして失敗したことから，非ユークリッド幾何が生まれた，とのことですが，非ユークリッド幾何では，その公理を導くことに成功したんですか？

答． 違います．平行線の公理に代わる公理から幾何学を作ることに成功したのです．

問． 「共線」というのは，３点を通る直線ということでしょうか？

答． そうではなくて,「３点が一直線の上にある状態」をいう言葉です.「線を共にする」という意味です．英語で，collinear と言います．形容詞です．

問． 直角三角形の合同定理がよくわかりません．

答． 直角三角形の斜辺と一辺の合同定理です．証明は，同じ長さの一辺どうしをつけて，二等辺三角形をつくり,「二等辺三角形の２つの底角は等しい」という定理と「三角形の内角の和は２$\angle R$」 という定理を使えば証明できます．

問． 平面幾何の公理で，$|AC - CB| < AB$ は要らないのですか？

答． 要りません．公理は「任意の A, B, C について $AB < AC + CB$ 」という意味ですが，こ

の公理から，質問の不等式は導かれます．なぜなら，$|AC - CB| < AB$ は，$AC - CB < AB$ かつ $-(AC - CB) < AB$ ということ，つまり，$AC < AB + CB$ かつ $CB < AB + AC$ ということですが，これは,「任意の A, B, C について $AB < AC + CB$ 」から従うからです.

問．重心で三角形をつるすと，つり合うのはなぜですか？三角形の重心はなぜ物理的にも重心なのですか？

答．わかりません．モーメントの問題ですが，物理の本に書いてあると思うので，ぜひ調べて教えてください.

問．エジプトのピラミッドにも幾何が応用されていると聞いたのですが，本当ですか？

答．歴史的なことは詳しくないですが，そうだと思います.

問．接弦定理の証明を教えてください.

答．「接弦定理」とは何ですか？詳しく補足説明してください．定理の名前の付け方はいろいろあって，知っている定理でも，国によって，本によって違うことがよくあります.

問．パップス・ギュルダンの定理の証明ができません.

答．「パップス・ギュルダンの定理」を知りません．詳しく説明してください.

問．トレーミーの定理とは何ですか？

答．知りません．詳しく内容を説明してください.

問．円周率を３にするくらいなら，もう教えないほうがよいような気がするのですが，どうでしょうか？

答．教えないほうがよい，というのは極端ですね．私は 3.14 で教えると良いと思います．世の中，変えるべきことと変えてはいけないことがあると思いますが，基本的なことは，そうそう安易に変えてはいけないと考えます.

問．角の３等分のように不可能を証明することは価値のあることなのでしょうか？

答．価値があります．不可能であるというが証明されれば，多くの無駄な努力をしなくてすむことになります．新たな方向に人類の努力を向けられるというポジティブなメリットがあります．数学ではないですが，永久運動の不可能の証明は，人類の文明史の中で，大きなできごとですね.

問．メビウスの帯は何のために研究されているのですか？

答．単純におもしろいからです．ところで，関係ないですが，モーターのベルトにメビウスの帯を使ったものがあると聞いたことがあります．裏表がないので良い具合なのかも知れません．アイディアはどこにもころがっていますね．要は，それに気がつくかどうかですね.

問．「いくら足の速い人でも，前を歩いている亀を追い抜けない」というのは，どうやって矛盾を示すのですか？

答．無限のプロセスには無限の時間がかかるという思い込みからくるジレンマですね.「アキレスと亀」だったかな．亀がアキレスの前方 10 メートルのところにいるとします．アキレスは１秒で 10 メートル進むとします．(オリンピック選手なみですね)．その間に，亀は，１秒で１メートル進むとします．(スピーディーな亀ですね)．そこには，1.1 秒後にアキレスが着きます．そのとき，亀はさらに 0.1 メートル進み，1.11 秒後には，アキレスがそこに... と考えていくわけですが，$1.11111 \cdots < 1.2$ なので，たとえば，1.2 秒後には，アキレスは亀をゆうゆうと追いこしているわけです．当たり前のことですね.

問．幾何学の中にも，かつてのフェルマーの最終定理のような難問は，今現在あるのでしょうか？比較的とっつきやすい問題を一つ教えてほしいです.

答．とっつきやすい難問と教えよ，とは難題ですが，強いて挙げれば,「ポアンカレ予想」です

か.「単連結３次元閉多様体は球面と同相か？」という予想です.

問.「仮説」とは数学的に重要なものですか？

答. 数学では，仮説 (hypothesis) というより,「予想」(conjecture) という言い方をします．証明できるかもしれないけれど，証明できない主張は，予想として提示されます．予想をすること，それを解決することは，数学の発展の上できわめて重要です．ちなみに,「リーマン仮説」とよばれている有名で重要で，正しいかどうかまだわかっていない予想があります.

問. 先生は幾何の定理を見つけたことがありますか？他の授業で量子論の話をされたとき，その先生は,「シュレディンガーが，波動方程式を導いたのは職人芸だ」とおっしゃていたのですが,そういうものなのでしょうか？

答. そうですね．学者と職人は似ているところがあるかもしれません．定理を見つけたことはあります．その定理の重要性は問わないことにすると，私は定理をたくさん見つけて証明しています．皆さんのイメージする幾何と，私の研究している幾何は，たぶんだいぶ違うと思いますが... ところで，数学のプロで，自分の定理 (あるいは理論) を持っていない人は，はっきり言って「もぐり」です.

問. 定理は何の為に暗記するのですか？定理を覚えるよりも公理から定理を導く方法を自分で考える方が大事な様に思えます.

答. その通りです．ところで，意外かもしれませんが，**定理は暗記するものではありません**.定理を覚えなければいけない，などと誰が言っているのでしょうね．こまったことです.

問. 定理の証明法は，あらかじめ存在しているものを覚えておくのですか？

答. 覚えていません．覚えられないし，覚える気もありません．覚えても意味がないからです.(証明の筋道はおもしろいので，いつでも再現できますが，細かい部分は気にしません).

問. 自分で補助線を探したりする作業はしないのですか？今までのところ自分で考えたりすることがあまりないように感じますが，そういうことは講義の中では行われないのでしょうか？

答. できれば，自分で考えることは自主的にやってください．自分で考えるには長い時間がかかりますが，講義時間は短く，たった９０分しかありません．ちなみに，大学の講義１コマ (９０分) に対して，２倍の時間，つまり３時間ぐらい自宅学習 (下宿学習，寮学習) は少なくとも必要だと思います．当たり前のことですが，皆さんは，勉強する (脳を鍛える) ために大学に入学したわけですね．ところで，質問書で教えてもらいましたが，花粉症は，注射を一本うっておけば，その年は出ないそうですね．ありがとう．でも，私は注射がきらい，医者にかかるのがきらいなんです．こまったものです．ではまた.

第４回問答

問．メネラウスの定理「$\triangle ABC$ の頂点 A, B, C のいずれをも通らない直線 ℓ と直線 BC, CA, AB の交点を D, E, F とすれば

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$$

である」

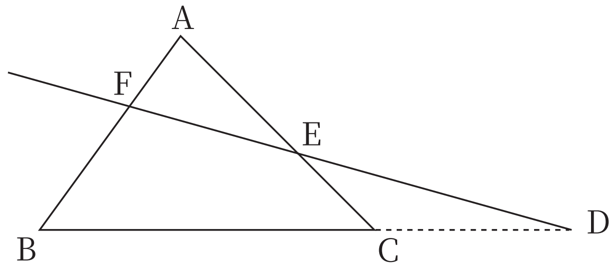

図 1: メネラウスの定理

は，３点 P, Q, R が，線分 AB, BC, CA になくても成り立つのですか？(多かった質問です).

答．こんにちは．最近，三波春夫の歌謡浪曲の CD を聞いています．やっぱり俵星玄蕃 (たわらぼしげんば) は何度聞いてもいいですね．さて，回答ですが，成り立ちます．メネラウスの定理の文章をよく見てみると，３点 P, Q, R が，線分 AB, BC, CA になければならないとは書いていませんね．１つの直線と，**直線** AB, BC, CA との交点なので，**線分上になくて，その延長上にあってもよい**わけです．定理の下に書いてある図は，あくまで参考図です．定理が適用できるすべての場合を描いているわけではないです．すべての場合を描くなんて不可能ですから．図は使って考えますが，図に惑わされてはいけないわけですね．図を見て，定理を勝手に解釈してはいけない，ということです．

問．メネラウスの定理は，今まで直線上にある３点のうち，２点が三角形の内部にあった形で使ってきたと思うのですが，３点とも三角形の外にある場合でも，メネラウスの定理は成り立つのですか？もしそうだとすると，今まで，メネラウスの定理を本当に理解していなかったということですね．

答．そうだと思います．

問．高校の時に，メネラウスの定理は，３角形があって，その上に直線が３角形の上を切るような状態のときに使える，と教わりました．

答．たぶんそれは君の勘違いです．メネラウスの定理に,「直線が３角形の上を切るような状態のとき」というただし書きはありませんね．数学の他の定理と同様，とにかく前提がすべてみたされれば，定理の結論は必ず成り立ちます．

問．講義の中で，定理を証明するために図を用いていますね，証明するときに，作図はどれくらい厳密さがあればよいのですか？

答．意外かも知れませんが，厳密に言うと，**証明に図は使っていません．証明には論理しか使っていません**．図はあくまで説明・納得用の参考図です．ですから，図は正確に書いた方がよいのはもちろんですが，定理のすべての場合の図を書くのは不可能です．それに，１つの図に限っても，君の使っている定規がもしかしたら曲がっているかも知れないので，完全に厳密に書いたかどうか判定できませんよね．

問. 大昔の人がつくった定理を用いないと証明できないなんて悔しいじゃないですか．例えば，平面幾何にとらわれずに，座標平面などで証明してつじつまが合った場合，それは「証明」したことになりますか？

答. どんな方法で証明しても，それが正しければ，もちろん構いません．ところで,「座標平面」を考えたデカルトも大昔の人ですよ．昔の人が作った定理を用いても，私は悔しくないです．むしろ，うれしい．昔の人に比べてわれわれが有利だとしたら，それは，昔の人の考えたことを活用できるからです．それだけの差です.「昔の人より現代人の方が賢い」などと考えがちですが，それはまちがいだと思います.

問. チェバの定理「$\triangle ABC$ の頂点 A, B, C と１点 P を結ぶ３つの直線がそれぞれ A, B, C の対辺またはその延長と交わる点を D, E, F をすれば等式

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

が成り立つ」やデザルグの定理等は，どのように発見されたのでしょうか？ひらめきだとしたら神業 (かみわざ) のように思えます．発見というものは，いくら論理的な思考を続けてもできないもののように思います.

答. まったくその通りです．(頭の硬いお役人ではないので) 論理的に考えてばかりいては，何も生まれません.「論理は最後のつめに使う」.

問. デザルグの定理「$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において対応する頂点を結ぶ３つの直線 AD, BE, CF が１点で交わっているとき、直線 BC と EF の交点を P、直線 CA と FD の交点を Q、直線 AB と DE の交点を R とすれば、３点 P, Q, R は１直線上にある」の「対応する頂点」とはどういうことでしょうか？どこの延長と，どこの直線の交点をとっていけばよいのですか？

答. 書いている順に，という意味です．A と D，B と E，C と F という意味です．文章に書いている，そのままの意味です.

問. デザルグの定理はどのような意味があるのですか？

答. ユークリッド幾何というより,「射影幾何」で重要な定理で，ほとんど公理と同じような役目を果たす，ということが知られています.

問. パップスの定理「３点 A, C, E が直線 m 上に、３点 B, D, F が直線 ℓ 上にあるとき、直線 AB と DE の交点を P、直線 BC と EF の交点を Q、直線 CD と FA の交点を R とすれば、３点 P, Q, R は同一直線上にある」は，直線上の３点の並び方に関係なく成立するのですか？

答. 成立します．というのは，証明では，点の並び方は使っていないからです.

問. パップスの定理で，AF と DE が平行になった場合はどうなるのですか？

答. 鋭いですね．その場合は，講義で紹介した証明は通用しませんね．でも定理自体は成り立ちます．射影幾何のところで，もう一度，証明しますが，その証明なら大丈夫です.

問. 「３点が一直線上にある」という結論にはどういう有用性があるのですか？自分の知識が乏しく，幾何学の経験が浅いため，よくわかりません.

答. 共線という状態のことですね．有用性というか，歴史的に人類が最初に注目した秩序 (あるいは美) であるということでしょうか.

問. 「定理の逆」という表現がわからないのですが？

答. まず,「命題の逆」というものを押さえておきましょう.「P ならば Q 」という形の命題 (真偽が判定できる主張) があったとします．この命題の逆命題は「Q ならば P 」です．ちなみに，否定命題は「P かつ (Q でない)」，対偶 (たいぐう) は「(Q でない) ならば (P でない)」です.

定理とは，(公理がすべて真であるという前提のもとで) 真であると証明された命題のことですが，通常，定理は,「P ならば Q 」という形をしています．P が定理の前提 (仮定) で，Q が定理の結論 (帰結) ですね．その前提と結論を逆にした逆命題のことを「定理の逆」と言うわけです．ある定理が証明された後，その定理の逆が成り立つ (真) かどうかを問うことは有意義なことです．ただし，定理の逆は，成り立つ場合もあるし，成り立たない場合もあります．もとの定理によって決まります．

問． なぜ定理の逆も証明するのですか？逆を証明する必要があるのですか？定理の証明を逆にといていくだけなので自明だと思うのですが.

答． 違います.「定理の証明を逆にといていく」ことはできません．たとえると，水は高い方から低い方へしか流れません．それはともかく，逆は必ずしも正しいとは限りません．たとえば,「$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ が合同ならば，$AB = A'B', AC = A'C', \angle ABC = \angle A'B'C'$」という定理を見てみましょう．$P$ は「$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ が合同」で，Q を 「$AB = A'B', AC = A'C', \angle ABC = \angle A'B'C'$」とすると，この定理は「$P$ ならば Q 」という形になります．この定理の逆 「Q ならば P 」は正しくないですね．実際に，$AB = A'B', AC = A'C', \angle ABC = \angle A'B'C'$ であっても，合同ではない三角形の例はすぐに作ることができます.

問． 平面幾何の定理で，逆定理が成り立たない定理はあるのですか？

答． あります．たとえば，高校で学ぶ形での「メネラウスの定理」(符号ぬき) は，逆は成り立ちません.

問． 証明で，よく対偶を使ったりしますが，なぜ対偶が真なら，命題が真なのでしょうか？例えば,「ごはんをたべなければ死ぬ」の対偶は,「死ななければごはんをたべている」となると思うのですが，これは真ではないはずです.

答． そもそも命題とは，真偽が定まるような主張であり，あいまいな表現で述べられた主張ではありません.「ごはんをたべなければ死ぬ」は，もともと数学で真偽の判定できないことがらですが，一歩譲って，判定できるとしても，もっと前提と結論をはっきりしてあげないと，命題とはみなされません．たとえば,「１年間ごはんを食べない人は，次の年には死んでいる」と修正しましょう．修正しても，質問の意図とそれほど離れないですよね．さて，この命題の対偶は,「次の年に死んでいなければ，その人は１年間ごはんをたべなかった人ではない」となります．こっそり食べていたわけですね．これは真と言ってよいですね．ほら，何の問題もないですね.

問． なぜ「対偶」は，必ず命題と同じ結果になるのですか？反例はないのですか？

答． 反例はありません．対偶は，元の命題と真偽を共にする，一心同体だからです.

問． 知らないうちに勝手に逆定理を定理として使ってしまうことがありますか？

答． そんなことはありません．(政治家ではないので).

問． 背理法が納得できません.「A でないと仮定して矛盾する．よって A ならば B である」といった背理法は，A でないという仮定があいまいな物ならば成り立たないように思うのですが.

答． 多分誤解があると思うのですが，まず,「A と仮定して，その上で B でないと仮定して矛盾する．よって A ならば B である」が背理法ですね．それから，数学では，あいまいなものは扱いません．(扱えません)．あいまいなものは，あいまいでないものにした後に，論理を適用しなければいけません.

問． 幾何では裏という言葉は使わないのでしょうか？

答． 私は「裏」という言葉はあまり好きではないです．裏口入学，裏日本，裏わざ，表裏のある性格，みんな好きではありません．裏街道を歩く渡世は少しだけ憧れますが… これは冗談で

すが，とにかく,「逆の対偶」と言えば済むので，私は使いません．

問． 公理「$\triangle ABC$ について，$AB < AC + CB$」が，高校の教科書で証明されていたのですが.「三角形において，大きい角に対する辺は，小さい角に対する辺より大きい」という定理を使っているようです.

答． そうですか．良いところに気がつきましたね．でも,「三角形において，大きい角に対する辺は，小さい角に対する辺より大きい」ということをどうやって証明するか，という問題になり，これを公理とするか，あるいは，また別の定理を使って証明することになりますね．実際,「$\triangle ABC$ について，$AB < AC + CB$」から「三角形において，大きい角に対する辺は，小さい角に対する辺より大きい」が証明できますね．つまり，２つの命題は同値な命題で，代用が可能だと思います．このように，公理系の選びかたには自由度がありますが，とにかく，何か出発点を決めて，そこから定理を証明していくということが，どうしても必要になりますね.

問． 円周率 π が，物理学などの他の分野にもよく使われるのはなぜですか？円周率 π という数は,「直径と円周の比率」という以上の意味があるのでしょうか？

答． 不思議ですね．きっと，オイラーの公式 $e^{\pi i} = -1$ が関係しているはずです.

問． 円周率はどのようにして求めているのですか？

答． 興味があれば，小林昭七著「円の数学」裳華房，を読むことをお薦めします．詳しい解説があります.

問． トレーミーの定理とは，円に内接する四角形の対角線の長さの積は，対辺の長さの積の和に等しい，という定理のことだと思います．証明は，確か，補助線と相似を使った気がします.

答． ありがとう．では皆さん，証明を考えてみてください.

問． 「接弦定理」とは (前回，僕が書いたわけではないですが) 「円の内接三角形とその１頂点を共有する接線でできる角と，三角形の１角は等しい」のことではないでしょうか？僕も証明法を知りたいです.

答． 教えてくれてありがとう．証明については，下の問答を参考にしてください.

問． 星形 (ほしがた) の図形の一番外側の角の大きさの和は，(角の数$\times$ 180 °) $-$ (a $\times$ 360 °) , ただし，a は，この図形を一筆書きしたときの回転数，で表されるそうです．これは，ピーター・フランクルさんの本に書いていたものですが，その証明法は？

答． ピーター・フランクルさんの本は見たことはないですが，おもしろいですね．この講義の終盤は，これをとりあげましょうか．それはともかく，(対称性の高い) 標準的な図形に (角の数 $\times$ 180 °) $-$ (a $\times$ 360 °) を変えないように変形できる，ということを示せば，あとは，標準的な図形で，チェックすればよいので，一般的な定理が証明されたことになります.

問． ３次元の物体は２次元の平面にわかりやすく書けるので，４次元の物体も３次元空間内にうまく表現できるのではないですか？

答． ３次元空間内に表現するのは,「ホログラフ」などを使うのかな．月並みですが，４次元の物体を，３次元の物体の時間的推移ととらえれば，アニメーションは，そのようなものではないでしょうか？

問． 「大円」とは何ですか？

答． 大きな円です．正確には，球面と，その中心を通る平面の交わりとして得られるような円のことです．球面に沿った最短経路です.

問． 「無限遠点の集合」というものがナンセンスではないでしょうか？

答． ナンセンスと思われるものに意味 (センス) を与えるのが，数学の役目です．それは,「世

界を広げる」ということで達成されます．

問． 高次元の幾何というものがあれば教えてください．

答． もちろんあります．説明すると長くなりますが，たとえば，皆さんがいま習っている線形代数は $\mathbf{R}^n$ や $\mathbf{R}^n$ の１次変換の話ですが，それを幾何的に (つまり深く) 理解すれば，それはもう高次元の幾何と呼ぶべきものです．

問． 割り算は，なぜ逆数をかけるのですか？それから，$\dfrac{3}{2} = \dfrac{6}{4}$ ですが，(1 あまり 1) = (1 あまり 2) になることはあるのでしょうか？小学生に質問されたとき説明できる自信がありません．授業とは全く関係ないのですが，とても気になります．

答． 割り算は，割る数をかけたら元の数になるようなものを求めることなので，逆数をかけることで達成されるわけです．それから，(1 あまり 1) $= 1 + \dfrac{1}{2}$, (1 あまり 2) $= 1 + \dfrac{2}{4}$ のことなので，なにも問題ないですね．それでは，質問です．$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{5}$ はどうして間違いなの？と小学生に聞かれたら，皆さんはどう答えますか？

問． メネラウスの定理の証明が思いつきません．発想できないのはセンスがないからでしょうか？訓練が足りないのでしょうか？発想できないとマズイのでしょうか？不安です．

答． 思いつかなくて普通です．たとえば,「最後の晩餐」の絵を見て，とても同じように描けないと言って悲観する人はいませんね．おもしろいと思えれば良いです．論理的に納得できるだけでもよいです．どうして，映画の「家族ゲーム」のような不自然なすわり方をしているのか，などと思ってもよいわけです．

問． 直感的に理解しにくくなると，とたんに理解が暗くなるのですが，これは訓練する必要があるのでしょうか？

答．「訓練」というと，軍隊みたいで，いやですね．それはともかく，直感を磨くことと，同時に，理詰めで納得する努力も大切ですね．

問． 定理を暗記しなくてもよいのですか？

答． しなくてもよいです．できれば，暗記しないで，明記 (銘記) してください．つまり，本当にそうなのかな，と思って，具体例にその定理をあてはめて確かめてみたり，証明を考えてみたり，その定理からどんな結果が導かれるか，応用を想像したりしているうちに，自然に身に付けるようにしてください．たとえると，友達の性格は，人から聞いたうわさを暗記する (うのみにする) ものではなく，直接つきあっているうちに，だんだんとわかってくるものである，それと同じです．

問． 定理の証明は覚えるのですか？

答． 定理の証明も，定理自体も覚える必要はありません．どんどん忘れてください．たとえ話ですが，皆さんが小説を読むとき，その文章を覚えようとはしませんね．(そのような特別な趣味がない限り)．覚えないけれど，ちゃんと読めて，理解して，感動できますね．ジーンとなったり，たまには泣いたりしますね．しないかな．分野は違いますが，数学もそれと同じことです．数学の勉強で必要なのは，小説を読むことにたとえると，基本的な日本語が読める，漢字が読める，場面を想像できる，自分の経験と比べられる，本を読む時間を作る，そのような心の余裕を持つ，といった，もっと基本的なことだけです．記憶力は問題ではないのです．

問． 深く学ぼうとする人にとっては，やはり覚えることも大切なのではないでしょうか？

答． 私の語感では,「覚える」ということは,「浅く学ぶ」ことです．意外かもしれませんが，深く学ぶには，くり返しくり返し，忘れることが大切です．勉強していれば，意識しなくても少し

は頭に残るものですが，それを忘れることを恐れてはいけません．何度も頭の中を通過しているうちに，大切なことは，忘れられなくなるはずです.「忘れようとしても忘れられなくなる」はずです．それが深く学ぶということです.「覚える」ではなく,「いつでも思い出せる」ということです．皆さんは，好きな人の名前は，覚えようとしなくても思い出せるはずです．それと同じことです．要は，**愛情の問題**です．ところで関係ないですが，私の友人の名言に,「忘れようとしても，思い出せない」というものがありました．

問．中点定理のことを「パップスの定理」と学んだのですが，間違っているのでしょうか？

答．間違いではないと思います．単純に，パップス先生は偉くて，いろいろな定理を発見したということだと思います.

問．今，僕たちが学んでいる定理の名前は，日本だけのものなのですか？

答．そうかもしれません．と言っても，ほとんどの定理の名前は，各国共通なので，ご安心ください．(でもたとえば，ヨーロッパとロシアでは，定理に付く名前が違ったりします．愛国心の強い人たちですね．) 仮に，外国の友人と話をしていて，もしも定理の名前を言っても通じなかったときは，その定理の内容を説明できるようにしておきましょう．その際，定理の文章を丸暗記していてもダメで，どういう定理か，その内容をかみくだいて (たとえば英語で) 説明できなければいけません.

問．どうして大学入試で幾何学は軽視されているのですか？

答．「役に立つ，役に立つ」という観点のみでやっているうちに，取りかえしのつかないことになってしまったのでしょうね．現在の教育行政は，日本の大学生の考える力を奪って，日本の将来の国力を弱めよう，という外国勢力の陰謀かもしれませんね．これは冗談ですが，まあ，大学の大衆化の必然的な帰結なのでしょう．こまったことです.

問．入試の数学と大学数学の違いは何ですか？大学は入試数学で何を受験生に求め，大学数学では何を学生に求めるのですか？大学の授業では，入試でやってきたことを使っていないと感じます.

答．使っています．使っていないように見えても，実は使っています．まだ，入学して１ヶ月ちょっとしか経っていないので，結論を出すのはまだ早いと思います．ところで，入試数学という意味がわからないのですが,「高校数学」の意味ですよね．そうすると，高校数学と大学数学の違いは何か，という質問だと思いますが,「抽象性，一般性の度合いの違い」と,「論証性の有無」が挙げられます．大学で学生に求めているのは，当然，生半可は知識ではなく，スバリ，考える力 (”脳力”) です.

問．数学者の方々は普段，何をされているのですか？

答．普段はボーッとしています．ところで，花粉症などのアレルギーは，お腹に寄生虫を飼うことで直るらしい，という情報をもらいました．注射よりましかもしれませんね．人工物を体に入れるより天然物を入れた方がよい... まあ，これは冗談ですが，情報ありがとう．でも，おかげさまで (この文章を書いている時点では) もう花粉症もだいぶよくなりました．元気を取り戻して，ではまた.

第５回問答

問． 射影幾何は，円や長さがなくて，どうして成り立つのですか？射影幾何は定規だけを使い，長ささえ関係しないとのことですが，円や長さに関係なく直線だけをいくら引いても平面が分割されるだけで学問にするようなことはないように思えてしまいます．まして，平行線が交わることにするなんておかしいです，無理矢理作った学問のように思えます．

答． こんにちは．この前の日曜日の「知ってるつもり」を見ましたか？三波春夫先生の特集でしたね．さて，回答ですが，よい質問ですね．これから講義でお話していくのですが，結論だけを言うと，直線だけを使うことによって，２次曲線 (円錐曲線) が考えられます．不思議ですね．それから，平行線が交わるというのは，確かに誤解をまねく表現ですが，通常の平面に,「無限遠点たち」を付け加えて考えるという意味です．はじめは無理矢理に見えるかもしれませんが，そのうち,「自然にできた幾何の楽園」であると感じてもらえると思います．

問． 射影幾何はユークリッド幾何とは別の数学ですか？射影幾何では，平行な２直線にも交点があるとみなしていて，ユークリッド幾何の「平行な２直線は交点がない」ということに矛盾しています．

答． その通りです．別の数学です．ユークリッド幾何のいくつかの定理が，射影幾何を通して証明できますが，それでも，あくまで別の数学と考えるのがよいと思います．

問．「定規だけを使った幾何」「平行な２直線にも交点があると仮定」という言葉にとまどいを感じます．

答． ハギレの良いわかりやすい言葉を使って説明している段階で，具体的にはまだ何も言っていないので，始まるまえから，わからないというのは早い．皆さんは話せばわかる，話せばわかると信じています．

問． 今までの講義もうっすらとしか理解できていないで，とりあえず板書だけした感じがあったのですが，射影幾何になったらアウトですか？

答． ユークリッド幾何と射影幾何は別の数学なので，まだ望みはありますね．ところで,「うっすらとしか理解できれいない」というのは,「全然理解していない」ということですね.「理解した」というのは,「道理でわかった」，つまり，たちこめた霧が晴れるように「はっきりわかった」ときに使う言葉なので… 失礼なことを書きましたが，奮起を期待しています．

問．「射影幾何」というものは,「ユークリッド幾何学を拡張したもの」という認識でよいのでしょうか？例外的な場合のみ役に立つということなのでしょうか？

答． その認識で間違いではないと思いますが,「拡張する」には，ユークリッド幾何にはなかった新しい考え方が必要であった，ということにも注目しましょう．その新しい考え方が，その後の数学という学問の流れ，ひいては人類の文明・文化の発展に多大な影響を及ぼしています．たとえると，皆さんが「がけっぷち」にいるとして，そこから先に進みたい，でもそれは無理だと，後ずさりするのも一つの道ですが,「翼を作って空に飛び立つ」という考え方もあるわけです.「平行線は交わらない」というのは,「人間は空を飛べない」というようなもので，それはそれでもちろん正しいのですが，じゃあ,「飛べるようにすればよい」という発想の転換も大切だったわけです．

問． 幾何学は，数百年も前に完成されていると思います．今の幾何学は進展できないと思います．

答． 私はそうは思いません．その幾何学自体が時代とともに変化していくわけです．学問に完成はありません．学問に終わりはありません．飽くことのない研究があるのみです．

問． 射影幾何が「直線」の概念だけのものなら，円を使ったパスカルの定理などは証明できなくなりませんか？

答． なりません．不思議なことに，直線の話だけから，２次曲線 (円錐曲線) が構成でき，パスカルの定理も，難なく証明できます．

問． デザルグの定理やパスカルの定理の証明で，なぜ，長さや角度を用いてはいけないのでしょうか？

答． いけなくはありません．正しい証明です．証明がカバーできない場合があるので，そこには通用しませんが，正しい証明です．言いたいのはそういうことではなくて，長さや角度には「こだわらない」，そうすることによって，新しい視点からものを考えられ，その結果，定理が「なぜ成り立つか」ということが理解できるようになる，ということです．

問． 各幾何の分野において必ず，真は真なのですか？

答． 真は真です．

問． 「円錐曲線」とは何ですか？

答． 円錐を平面で切り取ってできる曲線です．空間内に円錐をイメージしてください．上下両方に延びた円錐です．原点が「頂点」であるとします．(式で書くと，$x^2 + y^2 - z^2 = 0$ で表されます)．それを平面で切り取ります．水平な平面で切り取れば，円 (または点) ができますが，すこし，傾いた平面で切り取ると，楕円 (だえん) ができます．さらに平面を傾けていくと，放物線になり，さらに傾けていくと，円錐を上下の２箇所で切り取り，双曲線になります．このことから，いわゆる「２次曲線」，つまり楕円や放物線や双曲線を円錐曲線とも呼ぶのです．

問． パスカルの定理「６点 A, B, C, D, E, F が１つの固有２次曲線上にあるとき、直線 AB と DE の交点を P、直線 BC と EF の交点を Q、直線 CD と FA の交点を R とすれば、３点 P, Q, R は同一直線上にある」で出てくる同一円周上の６点は，順番は関係あるのですか？

答． 定理の文章に書いてある通りで，円周上での位置関係は任意です．

問． 幾何における定理は極端な条件でも成立しますか？たとえば，パスカルの定理でも，６点の間隔 $\to 0$ のときに,「定理の破れ」が起こることはないのですか？(パスカルの定理は円の接線になるだけなのかもしれませんが)．

答． 成立するときも，成立しないときもあります．極端な条件を考えることは，数学一般で大事な発想です．もちろん幾何学でも重要です．

問． パスカルとはどんな人ですか?物理で Pa(パスカル) という単位を使います．($[\mathrm{Pa}] = [N/m^2]$)．パスカルも物理学において多大なる貢献をしていたはずなので，数学者であり物理学者でもあったということになるのでしょうか？

答． そうですね．ただし，その当時，物理学というのはなかったと思います．物理学は新しい学問です．それに昔は物理は,「自然哲学」と呼ばれていました．だから「自然哲学者」であったといえます．それから,「数学者」という呼び名もあったかどうか怪しくて，たぶん「幾何学者」というべきでしょうね．パスカルは，幾何学者であり哲学者であった，ということですか．ところで，関係ないですが，パスカルの有名な著書「パンセ」の冒頭に,「幾何学的精神」と「繊細の精神」という区別が出てきますね．

問． 補助線によって与えられた点や線を使って証明を行った場合，それは図を使わずに論理だけで証明したことになりますか？先週の質問の回答で「証明は論理だけでなされていて，図はそれをわかりやすくするために書いているだけです」というのがありました．証明には論理しか使わないようですが，図を参考にして定めた各点の関係などが，一般的に成り立つのはどうしてで

すか？

答． 誤解されるとこまるのですが，証明を発見するのに，図は不可欠です．図を使わないで，定理を理解したり証明を見つけるのは不可能ですね．ここで言いたいのは,「図を使って発見した証明は，最終的には論理だけを使って書かなければいけない」，ということです．そうすることによって，図にかかわらない，一般的に成り立つ定理が証明できるわけです．

問． 線形代数とは何ですか？「行列」と「線形代数」という名称の関連もわかりません．行列を幾何にもちこむのですか？

答． もちこむのではなく，行列は幾何にもともとあるものです．線形代数は,「ベクトルと行列」を扱う代数学ですが，行列が線形写像を表現することから,「線形」代数と呼んでいるわけです．ベクトルや線形写像は，基本的な幾何の対象です．

問． 線形代数ができるまでに，幾何というのは色濃く反映したのでしょうか？

答． 反映しました．今，皆さんが習っている「線形代数」は，昔は「代数学と幾何学」と呼ばれていた科目です．皆さんの御両親や親戚の年輩の人で，大学で理系出身の人がいたら，聞いてみてください．たぶん,「代数学と幾何学」という科目を習っていると思います．それが今の線形代数です．ところで，デカルトが，代数を使って，幾何学を研究することを始めたわけですが，その流れが現代に至っていると言えます．射影幾何も，ここに深く関わってきます．つまり，線形代数は，幾何学が母，代数学が父であると言えます．

問． 今，実際に授業で線形代数をやって，行列の勉強をしているのですが，実際，線形代数は行列そのもののことなのでしょうか？行列といっても，実際は計算しかしていません．行列を応用して何か解くものが，この幾何学の他に何かあれば教えてください．(線形代数 = 行列だったら)．

答． 線形代数 = 行列，ではないですが，教えましょう．たとえば，統計の分野や，線形計画法では行列は不可欠です．

問． 射影変換というのは，広義での「関数」ということですね．

答． そうです．いわゆる「写像」です．

問． リーマン球面 (複素球面) で，無限遠点を１つ定めていますが，$+\infty$ と $-\infty$ はどうして１つだけに定まるのですか？

答． もともと，$+\infty$ や $-\infty$ は数ではありません．数列や関数の極限の状況を表す記号にすぎません．実軸上をプラスの方向に発散する状況を形容するのが $+\infty$，マイナスの方向に発散する状況を形容するのが $-\infty$ ですね．形容詞です．無限遠点は，そのようなものを実体化させたものであり，その過程で，発散する方向は，その無限遠点とは関係のないことなので，区別しない (できない) ということです．ちなみに，リーマン球面は「複素射影直線」とも呼ばれます．

問． 高校の時に,「$\sqrt{3}$ は無理数である」ということを背理法で証明した記憶があるのですが,「$\sqrt{3}$ は無理数である」という文章には仮定がなく，結論で終わっています．いったいこの仮定は何なのでしょうか？「〜ならば $\sqrt{3}$ は無理数である」という形でないと背理法は使えないと思うのですが．

答． 仮定がなくても背理法は使えます．「$\sqrt{3}$ は無理数である」に確かに仮定はないですね．もちろん，$\sqrt{3}$ の定義や，無理数の定義は前提にしていますが，ここでの仮定はない．だから，何も仮定しないで，$\sqrt{3}$ は無理数である，ということを否定して，矛盾を導けばよいわけです．ところで,「$\sqrt{3}$ は無理数である」という命題は，正しいので定理ですが，定理としての価値はあまりありません．というのは，この命題は，$\sqrt{3}$ という１つの数にだけ使えるだけで，一般性がな

いからです．たとえば,「p が素数ならば，$\sqrt{p}$ は無理数である」という命題ならば，やや一般性をもつので，定理としての重要性を増します．では,「p が素数ならば，$\sqrt{p}$ は無理数である」ということを背理法を使って証明してみてください．

問． トレミーとは，紀元前 150 年ごろの，エジプト生まれのギリシャの天文学者です．トレミーの定理は,「円に内接する四角形」についての定理であり，(対辺どうしを掛け合わせた 2 つの和) $=$ (対角線どうしを掛け合わせた値) ということです．四角形 $ABCD$ が円に内接するとき, $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ ということです．

答． トレミーの定理の逆は,「4 点 A, B, C, D が，等式 $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ を満たせば，四角形 $ABCD$ は円に内接する」ということですが，これは証明できますか？

問． $\sin t, \cos t$ の考え方は，いつごろ生まれたのですか？

答． 三角法ですね．幾何学の起原です．詳しく知りませんが，紀元前でしょう．

問． ぼくの勝手な判断ですが，直交座標系で，ピタゴラスの定理が成り立たない空間を非ユークリッド空間というと思うのですが，そんな空間が存在するのでしょうか？

答． そのような空間を非ユークリッド空間と呼ぶわけではありません．別の意味です．(今までの回答書を参照).

問． 楕円は円を一定方向に引き伸ばしたもので，面積も倍率だけ大きくなると，高校で習いました．

答． 面積とは何か，ということを明確にしなければ解けないわけですが，円を小さな長方形で分割して，それを一定方向に引き伸ばすと，その長方形たちが面積がその倍率だけ大きくなるので，楕円の面積も，もとの円の面積と比べて，倍率だけ大きくなる，という説明ではどうでしょうか.

問． オイラーの公式 ($e^{\pi i} = -1$) の作り方がわかりません．数学史上最も美しい式と聞いて (マンガで見て)，逆算して解体してみようと思ったのですが，全然できませんでした．また，これもマンガで読んだのですが，波動関数のような実在するものの計算にも虚数が出てくるというのは本当でしょうか？

答． オイラーの公式については，複素数について書いてある本には，どこにも書いてあります．それを参考にしてください．それから,「波動関数が実在する」というのは言い過ぎだと思いますが，量子力学に出てくるシュレディンガー方程式には，確かに虚数 (複素数) を使います．

問． 昔から気になっていたのですが，球の表面積はなぜ $4\pi r^2$ になるのですか？積分を使うのでしょうか？体積 $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ を r について微分したら $4\pi r^2$ になりますが，これも何か関係があるのでしょうか？

答． 積分を使います．積分と微分は逆の操作なので，当然関係があります．

問． 球の表面積について，高校のとき考えたのですが，次のような方法は間違っているのでしょうか？球面の赤道から角度 θ のところの微小な帯を切り取る．その面積は，$2\pi r \cos\theta$ である．よって，表面積 $S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r \cos\theta r d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r^2 \cos\theta d\theta = 4\pi r^2$.

答． 良いと思います．

問．「超越数」とは何ですか？そういえば，東大の金田教授らが π の小数点以下を 687 億 1947 万桁まで求めたらしいのですが，そこまで求める必要はあるのでしょうか？

答． 超越数とは,「代数的数ではない数」という意味です．代数的数とは，整数係数の代数方程式の解になるような数のことです．たとえば，$\sqrt{2}$ は代数的数です．というのは，方程式 $x^2 - 2 = 0$ の解だからです．π や e は代数的数ではない，つまり，超越数であることが証明されています．

ところで，π の 10 進法表示の計算ですが，計算しても別に害はないので，よいと思います．計算機の性能のデモンストレーションとしての意義があるようです．

問． 円と多角形というものの違いは何ですか？円 $= \lim_{n\to\infty}$(正 n 角形) と定義してもよいような気がします．

答． たとえば「丸い」と「角ばっている」の違いがありますね．それはともかく，定義の意味をもっと明確にする必要がありますね．ところで，脳の視覚についての最近の研究の結果，特定の傾きをもつ線分だけに反応する細胞や，円だけに反応する細胞などが見つかっているそうですね．そうすると，円を多角形から考えるのは，自然な傾向なのかもしれません．

問． 確かに,「ホログラフ」を使ったアニメーションは３次元空間における４次元の表現方法だと思います．ここでは，４次元における球を考えてみます．(x, y, z 方向以外に，時間 t の軸をとり，$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = r^2$ を満たすもののことです).「突然，何もないところから点が現れ，３次元の球となり，どんどん大きく膨らみ始めた．その膨らみ方は一定で，いつまでも膨らみ続けるかに見えたが，今度はまた突然一定の割合で小さくなっていった．そのうち球は点となり，次の瞬間そこには何もなくなった」．どうでしょうか？

答． その通りだと思います．ただし,「一定の割合」という部分は不正確な表現です．点が膨らみ始めるときと，膨らみ終わるときでは，膨らみ方が違うのが自然だと思います．

問． ４次元は３次元空間の軸に時間軸が加わったものだと何かで読んだのですが，現代の学問では何次元まででもあると仮定しているのでしょうか？その場合は，増える軸は何の軸だというのはあるのでしょうか？そもそも４次元など高次元の空間は存在するのでしょうか？

答． 何次元まででもあると仮定しています．それが何の軸か，ということは考えません．高次元の空間は存在するか，皆さんが存在せよと念じれば，そこに存在します．

問． $\dfrac{1}{3} \times 3 = 1$ ですが，これは，$0.3333\cdots \times 3 = 0.9999\cdots \neq 1$ で，一見おかしなように感じるのですが.

答． $0.9999\cdots = 1$ なので，全然おかしくありません．$0.9999\cdots$ という無限小数は,

$$0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 0.99999, \ldots$$

という無限数列の極限を表しているので，1 に等しいわけです．

問． ５次方程式はなぜ解けないのですか？

答． ガロア群が可解とは限らないからです．私は，学生のとき，アルティンの「ガロア理論入門」東京図書，という本で，ガロア理論を勉強して，５次方程式が解けないことがわかりました．

問． 「$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{5}$ がなぜ間違いか」について．コップ２つのうち１つ ＋ コップ２つのうち１つ ＝ コップ５つのうち３つ．先生：A 君はこう考えたんだね．生徒 A：はい，そうです．先生：この問題はさておいて，ケーキでも食べようか．$\dfrac{1}{2}$ のケーキと $\dfrac{1}{5}$ のケーキ，A 君はどっちがいい？A 君：$\dfrac{1}{2}$ は２つに分けたうち１つ，$\dfrac{1}{5}$ は５つに分けたうち１つだから $\dfrac{1}{2}$ のケーキ！先生：じゃあ A 君には，$\dfrac{1}{2}$ のケーキをあげる．と言って，すごく小さなケーキの $\dfrac{1}{2}$ を差し出す．そして，先生は $\dfrac{1}{5}$ のケーキを食べるね．と言って，すごく大きなケーキの $\dfrac{1}{5}$ を食べる．A 君：あれ？$\dfrac{1}{2}$ の方が小さい．どうして？先生：$\dfrac{1}{5}$ の方は，もともと大きいケーキを $\dfrac{1}{5}$ にしたものだね．$\dfrac{1}{2}$ の方はすごく小さなケーキを $\dfrac{1}{2}$ にしたものだね．このように分数を考える時は,「もとになるも

の」は何かを考えないといけないんだ．さっきの問題にもどるよ．コップ２つのうち１つ分を $\frac{1}{2}$ としたとき,「もとになるもの」は何？A 君：コップ２つ．先生：そうだね．じゃあ，コップ３つのいち１つ分の時,「もとになるもの」は？A 君：コップ３つ．先生：そうだね．ほら，今言ってもらったように,「もとになるもの」が違うよね．だから，分母の２と３を足して５にしたりできないんだ．A 君：わかりました．

答． 私：よくわかりました．

問． 算数と数学の違いは何ですか？

答．「数を算える (かぞえる)」と,「数を学ぶ」の違いです．

問． 平面幾何は，製薬会社で，どんな風に役立つと思いますか？化学系のことに関連することがありますか？

答． 立体幾何は，分子構造の解明に役立つと思います．

問． 数学で使われる公式，定理はすべて論理的に証明されてから使われるものなのですか？円錐，円の体積は，積分により公式が求められるのは分かりますが，積分は 15, 16C に生み出されたものなのに，それまで，円錐，円の体積が求めなかったと考えるのはおかしいと思いました．

答． そうですね．昔は，数学という学問が整備されていなかったので，証明されていなくとも，経験則として使用されていたと考えられます．現在の新しい学問のありかたと同じです．

問． なぜ昔の学者は他分野で活躍できたのですか？

答． 昔の人が研究した結果，その分野が発展し，いろいろな分野に分れたからそう見えるのだと思います．昔は，学問は何でも哲学 (あるいは幾何学) でした．現代でも，皆さんが，よい仕事をすれば，いろいろな分野に影響を与え，結果として，他の分野でも活躍できるかもしれませんね．

問． 西洋でのみ幾何学は発達したのですか？日本でも，鶴亀算をつくったり，江戸時代輸入されてきた３平方の定理を誰かが証明したりと，数学的思考が劣っていたわけではない様ですが．

答． 数学的思考が劣っているとは思いません．ただ，実用的思考が勝っていて，長期的視野に欠ける，ということが，東洋の文化の根底にあると思います．これは致し方ない，それを認めた上で，これからの時代に，西洋文明の生きづまりを克服するにはどうしたらよいか，ということを考えればよいと思います．劣等感も優越感も必要ありません.「冷静な誇り」と,「遠くを見つめる視線」があれば，日本人も国際社会で活躍していけると思います．

問． 古典幾何学の世界をより広く知るためのきっかけを教えてください．現代において古典幾何学の範囲内で幾何学をより追求している人はいるのでしょうか？

問． いると思いますが，詳しく知りません．ところで，こう言って予断をもつようなことを言ってはいけないのかもしれませんが，現在，古典幾何学を研究している人のレベルは低いと予想されます．というのは,「古典幾何学の範囲で」と枠をきめてしまった時点で，視点・方法に制限を設けてしまっているので，学問が姑息になってしまうからです．昔は，その古典幾何学が，制限ぬきの限界をきわめた学問だったからよいわけですが，現代において，いろいろな幾何学が生まれているのにかかわらずそれを無視するというのは，井の中の蛙 (かわず) であり，学問としての正当性が疑われるからです．でも，それはそれとして，古典幾何学を広く勉強するのは良いことです．たとえば,「幾何学大辞典」という本 (事典) が図書館や生協の書籍部にあります．分厚い本なので，あくまで参考にするとよいかなと思います．

問． 定理は証明できないと使ってはいけないのですか？習った範囲だから，証明しなくても使ってよいというのはおかしくありませんか？

答. 数学のユーザーをめざすか，数学の専門家をめざすか，によって答が変わってきます．ユーザーとしては，証明するのは専門家にまかせて，それを信用して定理を用いればよいと思います．もちろん，応用の際，必要が生じた段階で，定理の証明にまでさかのぼればよいわけです．一方，専門家を目指す人は，その定理の意味あいを証明が明確に表していることが多いので，証明を避けて通るわけにはいきません．定理を使った場合，問われれば，その証明を，概略だけでも再現できるのが理想です．

問. 普段ボーッとしているときに，数学の定理や何かをひらめく事が多いのですか？

答. ボーッとしているときも，忙しくしているときもひらめきます．ほとんどの場合，つまらないアイディアですが，ひらめきます．(電球マーク)．

問. 新たな定理を発見するのに必要なものはズバリ何だと思われますか？

答. スバリ，愛です．

問. 質問書の回答を読んで，周囲のレベルの高さ，知識の多さに圧倒されています．

答. それは刺激になって良いですね．この講義は，皆さんの自信を喪失させるためにあるのではなく，皆さんに幾何のおもしろさを伝えるためにあるので，積極的にこの機会を利用して，そしてマイペースで「考える力」を養成してください．知識は，必要を感じたらいつでも知ることができます．

問. この授業は「平面幾何の旅」ですが，歴史的なことはやらないのですか？あまり旅をしている気分になりません．もっと，その証明が見つかった時の歴史的背景や幾何の歴史などの講義をしてほしいです．証明ばかりではつらいです．

答. つらいですか．こまりましたね．朝日カルチャーセンターではないので，どこでも聞けるような話をしても仕方がないので，少し,「数学の中身に踏み込んだ話」をしているわけです．なるべく御期待に答えるように努力しますが，旅は非日常を体験することなので，たまには証明を気楽に鑑賞してみるのも良いかもしれない，と苦しい言い訳をしておきます．ところで，皆さんも御存じだと思いますが，この講義の題目は，難解なことで有名な映画「2001 年宇宙の旅」を意識して付けています．

問. ユークリッド幾何は現実的な平面幾何なのですか？ユークリッド幾何では証明できない定理があると言われましたが，それをなくしたものが，射影幾何ならば，ユークリッド幾何はあくまで「仮の」「抽象的な」平面幾何学だと思われます．全ての現象・定理を証明できるのが真の幾何学ではないでしょうか？それともそんな幾何学はないのですか？

答. 全ての現象・定理を証明できる幾何学などはありません．もし，あると言ったら明らかな詐欺になります．

問. 定理を証明するのは，数学的に美しいからですか？

答. その通りです．

問. どうすれば，証明を授業でやっているように，すらすらできるようになるのですか？

答. 「すらすら」できている，などと言われたのは生まれて初めてです．とにかく，事前に準備しているからです．

問. 質問のために予習した方がよいでしょうか？せっかく質問するのだから実のあることを訊きたい，などと思っているのですが．

答. この科目に限らず，予習 (と復習) をすることをお勧めします．

問. 毎回，理解はしていますが，質問を無理に作るのはむごいような気がします．

答. 無理に作らず，自然に作ればよいと思います．授業を身を入れて聴いていれば，自然に質

問が湧くと思います．ところで，学問の基本は「自問自答」だと思います．自問自答しながら講義を聴くのが理想です．その際，もちろん，声に出すとうるさいので，黙って頭のなかで自問自答するわけですが，それにすべて答えられたら超天才です．普通は，わからないことが１つぐらいあるはずです．自分に尋ねてわからなかった質問を詳しく書けば，それでよいのです．

問． 大学の数学というのは，論理として成り立っていれば，切り捨てたりすることは少ないですか？高校の時に，数学がすごく好きで，よく考えて，自分にあった方法を使ってやっていました．そうすると，先生に,「お前の解答を見るとすごく疲れる」やら，塾の講師に自分のやり方のなおし方を求めたら,「そんなやり方は大学に行ってからやれ」といわれました．そんなことはあまりないのですか？

答． ないです．どんな方法でも正しければ，どんどん使ってください．ただし，その際，自分の方法を，人にわかってもらえるように努力してわかりやすく説明しなければいけません．実は，数学とは,「方法をわかりやすく説明する学問」なのかもしれません．ところで，花粉症と寄生虫の件ですが，寄生虫のために用いられた免疫システムの力があまって，無害な花粉などにも反応するようになってしまったそうだ，という情報をもらいました．花粉症の予防には，鼻の奥の粘膜の部分をレーザーで焼いてしまう，というのもあるらしい，痛みがなく，個人差はあるが，何年間かもつらしい，という情報ももらいました．でも，私は自分の体を傷つけるのは好きではありません．それから，三波春夫がわかりません，という質問がありました．最近亡くなった，あの偉大な国民的歌手を知らないなんで信じられません.「知ってるつもり」を見ましたか？三波豊和の父親ですね．ではまた.

第６回問答

問． $\mathbf{R}^3$ の原点に立って，空間内にあるスクリーンを見ているとします．(スクリーンは無限に広い)．スクリーン上に平行線 ℓ と m を映すと，原点に立っている人には，ℓ, m が平行であるにもかかわらず，無限遠で交わっているように見えますね．これが「平行線が交わる」ということですか？これだと,「射影平面上の点」が「原点に立った人の視線」に対応するので，射影幾何がぐっと身近になると思うのですが，合っていますか？

答． こんにちは．先日出張で京都に行ってきたのですが，札幌の方が，過ごしやすいシーズンになってきましたね．さて，回答ですが，合っています．その通り，我が意を得たりです．というより，私の説明より分かりやすいですね．講義では，射影平面の点は，３次元空間の原点を通る直線であると説明し,「光線」でたとえましたが,「視線」と言ったほうが，感じがでますね．ただし，普通に視線と考えると，平行線が，(振り返れば) 前後の２点で交わるように見えます．でも,「直線は１点で交わる」ほうが，いままでの平面幾何と折り合いがよいので，前後の交点は「同一視します」．(これは，射影平面の点である直線には向きを考えないということに該当します)．したがって，射影平面の点は「前後の区別がつかない視線」であると言えます．

問． xyz 空間 $\mathbf{R}^3$ で原点を通る直線１つ１つが射影平面の点ということでしたが，その意味がわかりません．

答． 原点から見たら，原点を通る直線は点に見えますね．射影平面は直線 (視線) の集合です．

問． 射影平面の世界では，必ず点で見えるのですか？原点で人が星を見ているとして，次に人が歩いていったらどうなるのですか？

答． 人は歩きません．

問． なぜ無限遠点は１つの直線になるのですか？

答． 無限遠点たちは「無限遠直線」と呼ばれる射影直線を形成します．視線で言うと，水平方向の (スクリーンと平行な) 視線が，射影直線になりますね．これです．ちなみに，射影直線は，どの場合でも，普通の直線に，１点を余分に付けくわえたものになります．

問．「２つの射影直線は必ず１点で交わる」とありますが,「必ず」ですか？交わらないことはないのですか？

答． 必ず交わります．

問． ２つの射影直線は必ず１点で交わる，とありますが,「２つの平面は必ず１つの直線で交わる」と混乱している私をどうにかしてください．

答． 混乱していません．というのは，射影直線とは，$\mathbf{R}^3$ 内の原点を通る平面があって，その上にある原点を通る直線たちからなる $\mathbf{R}P^2$ の部分集合です．平面を指定すれば，その上の直線は，方向によって１次元の自由度を持ちます．もう１つ平面をとれば，別の射影直線が決まります．これらの２つの射影直線の「交点」とは何でしょう．射影直線は,「直線のあつまり」なので，両方に共通している直線です．ですから,「$\mathbf{R}^3$ の原点を通る２つの平面は必ず１つの直線で交わる」ということがすなわち,「２つの射影直線は必ず１点で交わる」という意味なのです．

問． 射影平面がイメージできません．

答． 原点から見た視線の全体ですが，それをイメージする１つの方法は，全方向型のプラネタリウムを想像することです．あるいは「宙づりになった自分」を想像してください．しかも，前後の区別はつかないとします．つまり，前に見える映像と，真後ろにある映像は，原点に対して完全に対称であると想像してください．すると，射影平面は，球面を，その対心点どうしを同一視して得られる２次元の空間とイメージできます.「対心点」とは，原点に関して対称な点を言い

ます．日本とブラジルです．ただしその際，曲り具合は，気にしないでください．気にするなと言われても，気になると思いますが，気にしないでください．ところで，射影平面には,「メビウスの帯」が隠れています．どこに隠れているでしょうか？

問． なぜ射影平面は”平面”なのに３次元で考えるのですか？

答． 次元を上げると，無限遠点が導入できるからです．２次元のままだと，そんな余裕はないのですが，３次元で考えれば，余裕ができるわけです．カバンに「若干の余裕」ができるわけです.

問． 射影平面は３次元ですか？

答． ２次元です．射影平面自体は２次元です．それを３次元空間を介して理解しようとしているわけです.

問． 射影平面を $\mathbf{R}P^2$ と書くそうですが，$\mathbf{R}$ や P は何の略ですか？

答． $\mathbf{R}$ は real の頭文字，P は projective の頭文字，2 は次元を表しています.

問． 無限遠点とは「無限に遠くまで続く点」と読んで字のごとく解釈してよいのでしょうか？

答． よくありません.「続く」というのはどこにも書いていません．”無限遠続点”ではありません．本当に文字通り,「無限に遠くの点」と解釈してください.

問． ユークリッド幾何では考えられなくて射影幾何ならできるというものが，何かあるのですか？ユークリッド幾何と射影幾何には優劣があるのですか？

答．「平行な」２直線の交点は，ユークリッド幾何では考えられません．したがって，配景写像も (例外が出てきて) 考えらません．でも，ユークリッド幾何と射影幾何に優劣はありません.「理論」はカバンにたとえられます．穴があいていてはいけません．小さなカバン，大きなカバン，実用的なカバン，格好良いカバン，といろいろあります．どれがよいかは，何を運ぶか，どこに持っていくかによって変わってくるわけです,

問． ユークリッド幾何は不完全だったのですか？

答． ユークリッド幾何は完全です．いままで証明した定理も，例外のないように平行になる場合も詳しくのべて，証明も，場合分けを詳しくすることを厭 (いと) わなければ完璧にできます.それはそれとして，射影幾何で扱えば，単純に述べられ，簡単に証明できる定理がある，ということも確かです.

問． ユークリッドの諸公理は，近似的にしか成り立たないのはなぜですか？

答． そんなことはありません．公理は「成り立つ」ものではなく,「大前提」です.

問．「平行」の定義は？

答． ユークリッド幾何では，２直線が平行とは，交わらないことです．射影幾何では，平行という概念は定義しません．ちなみに，射影平面上では，どの２直線 (射影直線) も交わります.

問． 平行という概念がないはずなのに，スクリーンと平行な直線は交わらないというのはどういう事ですか？

答． 鋭いですね．３次元空間で平行と言っているのは，そこではユークリッドの立体幾何の言葉を使っているわけです．立体幾何は補助的に使ったけれど，射影平面では平行ということは考えません (考えられません).

問． 射影幾何が誕生した背景が知りたいです.

答． 1812 年にロシア遠征したナポレオン軍の兵隊だったポンスレという人が，ロシアの捕虜になり，牢獄の中で暇だったので射影幾何を見つけたという話があります．たぶん，牢獄にはコンパスはなく，小さな窓から入る太陽の光線だけがあったからでしょうか．それはともかく，遅

かれ早かれ射影幾何が作られる歴史的必然であったと思います．

問． 地球の経線は赤道上では平行ですが，２極点では交わっています．このことから，球の表面の２次元平面における直線というものは射影幾何の範囲の話なのですか？

答． ある意味でそうですね．

問． なぜ授業では曲線は扱わないのでしょうか？曲線の役割は大きく，直線や射影だけなら，ちょっと興味が低くなります．

答． ２次曲線はこの講義の範囲で扱えます．

問． ３次元で平面が交わらない時，４次元にすると交わる場合はあるのですか？

答． ３次元射影空間を考えると，無限遠で交わると考えられます．

問． 「写像」という言葉の意味は何ですか？

答． 「像を写す」という意味です．集合 X (講義では直線を形成する点集合) から集合 Y (講義では，これも直線を形成する点集合) への写像という言い方をしますが，それは，集合 X のそれぞれの要素に対して，集合 Y の１つの要素を対応させる規則のことです．X の要素 (幾何では，点とも呼ぶ) x に対して，Y の要素 (幾何では，点とも呼ぶ) y が対応する場合 $y = f(x)$ で，その写像 (規則) を表します．その典型的な例が，配景写像です．

問． 僕は理学部数理系で数学序論の講義に出ているのですが，そこで集合と写像の基本的性質について学びましたが，幾何での写像とは全く関係ないのでしょうか？

答． 関係ないどころか，まったく同じものです．写像ということばは「像を写す」ということで，もともと幾何の配景写像や射影から抽象化された概念です．

問． 「直線」は２点できまる気がします．

答． もちろんそうです．講義で説明しているのは，直線から直線への射影が３点の行き先できまる，ということです．

問． 複素平面みたいな射影平面はありますか？

答． 複素射影直線がそれに該当すると思います．

問． 射影幾何は図学に近い分野ですか？

答． 図学の基礎になる数学理論であると言えます.「形状 CAD と図形の科学」(工系の数学シリーズ) という題名の本がありますが，そこには，射影幾何が詳しく解説されています．ちなみに，CAD とは computer aided design の略です．

問． 一次変換とは何でしょうか？正則一次変換とは何ですか？

答． 線形変換とも言います．線形性をもつ変換です．行列を使って表されるものです．正則１次変換とは，正則行列で表される１次変換のことです．このとき，線形性から，直線は直線に，平面は平面に移されます．

問． 一次変換の有用性とは何ですか？

答． 幾何学ではもちろんのこと，数列，微分方程式，力学系，統計，数理経済学，など，いろいろな分野で当たり前のように使われる基本的な概念です．

問． 円錐を平面で切った時に直線ができるのは円錐曲線の例外ですか？

答． なるほど，２本の直線が切り口にでる場合がありますね．それも円錐曲線の一種です．この講義では，円錐曲線とは言わず,「２次曲線」と呼びますが，２本の直線は，２次曲線の仲間に入れます．そして，楕円や双曲線や放物線たちを,「真の２次曲線」と呼びます．

問． 立体幾何に強くなる方法はありますか？

答．街を歩いているとき，建築物をよく観察すると良いかもしれませんね．

問．「立体幾何」独特の定理や考え方などがあったら教えてください．

答．代表的なのは「三垂線の定理」ですが，これは知っていますか？

問．今日の授業の中の説明や，たしか物理の万有引力のエネルギーのところで用いられている「無限遠点」という概念について今まではなにげなしに，ああ，そうか，と思っていたのですが，よく考えてみると,「はるか遠くの点について考えてみる」というのはわかるのですが，無限遠のところに点がある，しかし，点があるということは限りがあるということになるような気がして，わけがわかりません．あまり考えないほうがよいのでしょうか？

答．物理で使っているのは，ある種の極限操作をしているということで，実際に「無限遠点」という点を考えているわけではないと思います．

問．幾何で微分・積分は使いますか？微分積分と線形代数を知っていれば，現代幾何学を十分に理解できます．

答．使います．どんどん使います．

問．「公準」とは何ですか？

答．公理のことです．特にユークリッド幾何の公理は公準と呼ばれることも多いようです．

問．リーマン幾何は射影幾何なのですか？

答．違います．射影幾何とリーマン幾何は別のものです．リーマン幾何では「長さ」は大切な概念です．

問．「円の直径と円周の比が一定」とはどのようにして導き出されるのですか？

答．円周の長さ $L = 2\pi r$ で，その係数 π が半径 r によらない定数であるということですね．半径と円周が比例するということですね．

問．関数の極限で ε 論法があったのですが，なぜそれが必要なのですか？

答．素朴な概念でも通用することがありますが，たとえば「一様収束」などを考えるときは，どうしても，そのような高級な言語が必要になります．ハワイに１週間だけ観光旅行に行くにはあいさつ程度の英語で十分ですが，ホームステイするときには，ある程度本格的な英語が必要ですね．

問．大学では円の定義は高校のそれと違うと聞いています．それによると，丸ではなくても，少し角ばっていても，その定義に従えば円といえるとなっているのですが，そんな円はあるのでしょうか？

答．たぶん位相幾何 (トポロジー) のことでしょう．連続的に円に変形できるもの，たとえば，楕円も，位相幾何の立場では「円」と呼ぶことがあります．この講義でも説明する予定です．

問．昔，私の読んだ「複雑系 (M. ワールドロップ著，新潮文庫)」という本のなかで，新世代の経済学者が古典派経済学を批判して「古典派経済学のように多くの仮定の上に成り立つ理論は，すべてが数式で説明できるような非常に美しい理論だが，その代わり現実からはかけ離れてしまう」と述べていました．射影幾何では「無限遠点」という現実には存在しないような仮定まで用いられていますが，現実世界にそのようなものが応用できるのでしょうか？

答．以前にも書きましたが,「平面」も「直線」も現実には存在しません．(存在するというなら，どこにあるか言ってください)．存在しません．では，存在しないのに，われわれはなぜ考えられるのでしょうか？数字の 「$1, 2, 3, \ldots$」 も現実には存在しません．でもそれがなければ，みんな困りますね.「無限遠点」もそれと同等です．経済学の問題は，そのような数学を使った「モデル」が「現実」を説明するかどうかを検証する手続きですね．それを怠ってはいけないという

ことです．経済学は「論理的な整合性」や「単純さ」や「美しさ」より「現実の経済の説明・予測」が目的の学問なので，数学とは目的が違うと言えます．したがって，数学が応用できるかどうかは皆さんの見識にかかっています．ちなみに,「現実」の経済を説明するのに十分な経済学の理論はまだないと思います．誰か作ってください．ただし，その際,「現実世界」とは何かということをはっきりさせなければいけませんね．軽々しく,「現実」などという経済学者は信用できません．古典派経済学も良くないが，その新世代の経済学者の発言も軽薄ですね．

問．「小数次元」や「５次元以上」はどんな概念なのですか？幾何学というのは図形に関する学問ですよね．図形は目に見えるものですね．しかし，例えば「時間軸」に垂直な直線というのは想像すらできません．

答．小数次元については「フラクタル」という題名の本に書いてあります．５次元以上は，線形代数で習います．(習っています)．ところで，確かに，幾何学は図形に関する学問ですが,「目に見えない図形」も扱います．目に見える図形しか扱えないとしたなら，たとえば，盲目の人は幾何学ができないことになってしまいます．でも，ポントリャーギン (特性類の理論で有名) とかモラン (球面を３次元空間で裏返す簡単な方法を見つけたことで有名) などといった目が見えない偉大な幾何学者がいます．それはともかく，幾何学は目に見えない図形も調べる学問です．そのとき頼りにあるのは,「心の目」つまり想像力です．時間軸に垂直な直線を想像できるように，想像力を鍛えてください．

問．無限とは一体何ですか？無限という概念は幾何からでてきたのですか？

答．そうかも知れません．一言で「無限」と言っても，いろいろな無限がありますね.「数が無限」「空間が無限」「可能性が無限」…「無限大」という言葉も,「数列が無限大に発散する」「$1, 2, 3$ 無限大」「借金が無限大」…「テラスに坐っているとき私は，海を見渡していると人間が，無限大の一部分をとらえたような気になる，と言ったボーアの言葉を繰り返し考えていることが多かった.」(ハイゼンベルグ『部分と全体』から)．とにかく人間が処理できないものを「無限」と呼んだのかもしれませんね．その無限を，数学の対象として明確に扱ったのは，確かに射影幾何が最初かもしれません．

問．宇宙は閉じた３次元空間かもしれないそうですが，どうイメージすればよいのでしょうか?

答．一番想像しやすい閉じた３次元空間の例は，この教室の左右の壁をはり合わせ，前後の壁をはり合わせ，天井と床をはり合わせてできる空間です．(「３次元トーラス」と呼ばれている空間です)．想像できますか？壁に向かってあるいていくと，壁をすり抜け，反対側の壁から出てきます．もちろん，宇宙がどのような空間であるか (どのような空間と考えるのが妥当か) はまだわかっていないようですね．

問．宇宙は現在 26 次元から成り立っていると聞きましたが，本当ですか？

答．そういう理論があるのは確かです．

問．何かの本で数学の不確定性原理というものを読みました．

答．「ゲーデルの不完全性定理」のことだと思います．

問．割り算で，$1 \div 0$ が定義できないというのはどうしてですか?$1 \div 0 = \infty$ で良いと思います．

答．∞ は数ではありません．$1 \div 0$ の意味は,「0 を掛けたら 1 になる数」という単純なものなので．そんな数はないので,「定義しない」わけです．もちろん，$1 \div 0 = \infty$ と定義するのは可能ですが，そうすると，$0 \times \infty = 1$ となり，たとえば両辺に 0 を掛けると，$1 = 0$ が導かれ，すべての自然数が 0 になってしまいます．このように，∞ を数とみなして，整合的な数の体系を作ることは困難です．

問． 行列を世界で一番最初に発見したのは関孝和です．科学史の授業でそう言われました．また，円周率自乗の公式を発見したのは建部兼弘です．

答． たぶん,「行列式」の発見のことを言っていると思います.「行列とは何か」ということですが，問題は，その行列をもとに幾何の理論を展開できたかどうか，その理論が他の分野にどのように影響を及ぼしたか，ということにあり，その点で，関孝和は恵まれた環境にはなかったと言えますね．仮に，行列を発見したのは関孝和である，という史実があったとしても，日本人以外は，ああそうですか，ということになると思います．現代数学にケーリーが及ぼした影響の偉大さと比較すると，残念ですね．関孝和にしろ，建部兼弘にしろ，優秀な和算家がいたことはわれわれの誇りです．でも，産業革命が日本で起きなかったのはなぜでしょう．なぜ，明治時代に，和算ではなく西洋数学 (洋算) を受け入れ，それをもとに富国強兵を進めたのか，関孝和や建部兼弘が評価され出したのは，ごく最近になってからですが，それはなぜなのか，考えなくてはいけませんね．(不正確な回答ですが，回答の真意はこの場合史実の正確さにはないので，あえてそのまま載せました).

問． 講義内容が理解しきれていないと，質問すらでてこない時があり，困ります．理解できた人こそ質問がでてくるのだと思います．

答． そういうことです．そういうわけで，質問書を成績評価の資料として採用している次第です．

問． 何を質問すればよいのでしょうか？

答． 講義を聞いていて，最初にわからないことが出てきたことを質問してはいかがでしょう．えっ？全部わかった？私の授業は，そんなにわかりやすいですか？それなら嬉しい限りですが，もしそうだとしても，何か連想したことを質問してください．ところで，講義中に「ケーリー・ハミルトンの定理」が出てきましたが，最近の高校数学では,「ハミルトン・ケーリー」に修正されている様です，という情報をもらいました．私はケーリー先生を尊敬しているので，その問題は見過ごせませんね．なんとかケーリーをつけたい．ところで，花粉症を放っておくというのはかなりつらいことなので，自分の体を傷つけるのと同等なのでは？それに何度も鼻をかむと鼻の下も痛くなるし... という指摘を受けました．何か反論したいのですが，もう思いつきません．最近，杉の木に何かの水溶液をある濃度で注入すると花粉の量が激減することがわかったそうです．近い将来，花粉症で苦しむ人はいなくなるかもしれません，という情報をもらいました．それは人間にとって朗報ですね．でも，杉にしたら迷惑な話でしょうね．ところで，三波豊和が，私が幼少のころ NHK 教育テレビで「はに丸くん」に出演していた記憶があるのですが，友人は冷たく「知らない」と言い放ちました，という情報をもらいました．あの名作「はに丸くん」を知らないなんて... ところで，はに丸くんの相棒の埴輪の馬の名は「じんべい」でしたか？また，三波春夫さんは，かつて笑点の大喜利の司会をしていた，というコメントをもらいました．それは，てんぷくトリオの三波伸介 (みなみしんすけ) さんですね．びっくりしたなーもう (三波伸介の有名なギャグ)．ではまた.

第７回問答

問．「双対」の説明で,「２点を通る直線 $\leftrightarrow$ ２直線の交点」と翻訳される，という意味がわかりません．

答．双対 (そうつい) の話ですね．これから講義で説明するのですが，たとえると,「鏡の世界」の話です．でもそれは，特別な鏡なので,「あべこべの世界」と考えてもよいかも知れません．あるいは，少し意味が違いますが,「天の邪鬼 (あまのじゃく) の世界」でしょうか.「あべこべの世界」では，もとの世界に直線があったら，点があり，もとの世界に点があったら，直線があると考えます．あべこべの世界での点を，区別するために点* と書き，あべこべの世界での直線を，直線* と書くことにします．すると，もとの世界での「２点を通る直線」は，あべこべの世界では「２直線* を通る点*」つまり,「２直線* の交点*」となります．

問．「無限遠点から成る無限遠直線」とありますが，よく意味がわかりません．

答．地球が球形ではなくて平面だと想像して，その地平線を思い浮かべてください．青い空と，無限に広がる灰色の大地．目が眩むような光景ですが，想像してみてください．すると，目の高さから下は全部灰色，目の高さから上は全部青色になっていますね．灰色の擂り鉢 (すりばち) の中にいる感じです．では，丁度目の高さの部分「地平線」は何色でしょうか？その方向には地面はないから，空ですね．青色です．それが「無限遠点から成る無限遠直線」です．(ただし，前後の区別はつけません)．

問．無限遠点は複数個あるのですか？

答．そうです．無限個あります．

問．「射影平面からふつうの平面を取り除いた残りの部分は，$\mathbf{R}^3$ の中の原点を通らない Π と ($\mathbf{R}^3$ の中で) 平行な直線からなる」の部分がまったく謎です．小学生にもわかるように教えてください．

答．ふつうの平面を理解するにもそれなりの抽象能力が必要なので，小学生に射影平面をわかってもらうのは，その小学生が大天才でない限り，たぶん無理だと思います．でも，なるべくわかりやすく説明すると，上の回答で，Π は灰色の大地です．(前後の区別をつけないことにすると) 灰色の大地が見えない方向は，水平線の方向ですね．それが「残りの部分」で，水平に見た視線からなり，その視線は，大地に対して平行になっているということです．

問．射影平面での直線がよくわかりません．

答．「射影直線」のことですね．$\mathbf{R}^3$ の原点を通る平面を指定したとき (もちろんそのような平面はたくさんありますが) その平面に沿った視線の全体というのが射影直線の定義です．

問．「複比」についてよくわかりませんでした．何と何の比なのですか？

答．ここでは紹介しませんが，比の形であらわされるから付けられた名前ですが，とにかく,「射影直線上の４点で定まる比」と考えてください．

問．配景写像という用語の意味がわかりません．

答．**直線 ℓ から直線 m への，点 P を中心とした配景写像**とは，直線 ℓ から直線 m への「写像」であって，ℓ 上の各点 Q に対し，直線 QP を考え，その直線と m の交点を R としたとき，点 Q に対し，点 R を対応させる規則のことです．(ここでいう直線は，射影直線です)．

問．配景写像ではない射影の例を見せてほしいです．

答．２直線の交点を動かせば配景写像ではありません．別な直線への配景写像を１回経由して，そこから配景写像を続ければ交点を動かすことができますね．それは配景写像ではありません．

問．配景写像が 0 回で射影になる場合は，どんな場合ですか？直線 ℓ と m が一致するときで

すか？

答． そうです．２直線が一致して，しかも点をまったく動かさないときときです．(恒等写像).

問． 射影幾何の基本定理の内容がよく分かりません．

答． 一般に直線から直線への「写像」というのは，かなりたくさんあります．今，曲がらないけれど伸び縮み自由な蛇腹 (じゃばら) を想像してください．少し気味悪いかもしれませんが．その蛇腹を伸び縮みさせて置き場所をかえることが直線から直線への「連続写像」に該当します．(途中を切ったりしていないので連続であると言います)．その場合は，少し考えるとわかると思いますが，３点どころか，４点，５点の場所をあらかじめ決めても途中の位置は自由にできますね．そのように一般の写像ならたくさんあるわけです．**射影は写像の一種**ですが，それほど自由はきかないけれど，３点までは自由に指定できて，しかも３点の行き先を決めれば，途中は，(射影であるということから) すべて決まってしまうということです．

問． 「直線から直線への射影」では，なぜ３点の行き先で決まるのですか？２点で考えると何が足りないのですか？

答． ２点ではデータが足りません．いわゆる「合同変換」なら，確かに２点を指定すれば決まってしまうのですが，射影変換は，もう少し自由度が高いのです．２直線 ℓ と m を想像してください．たとえば，その交点 A と，ℓ 上の点 B と m 上の点 B' について，A を A に，B を B' に写すような ℓ から m への射影にはどういうものがあるか想像してみましょう．B と B' を通る直線上の点 P を中心とした ℓ から m への配景写像は，P が直線 BB' 上にあれば，A を A に，B を B' に写すので，１つには定まりませんね．(図を描きながら考えてみてください)．

問． 直線から直線への３点の射影がなぜただ１つなのか分かりません．

答． たぶん誤解があると思うのですが,「直線から直線への射影という特殊な写像は，３点の行き先を指定すれば決まってしまう」という意味です．射影の決定のためには３点観測で十分，という意味です．

問． 射影幾何の基本定理の説明では，２直線の交わる点と，その両側の点を３点を取ると説明できません．

答． 鋭いですね．良い質問です．交点を交点に写すような射影は，配景写像で実現できてしまうので，言及しなかったと考えてください．説明不足でした．

問． 「直線 ℓ から m への射影が，ℓ と m の交点を動かさないならば，配景写像である」の逆，つまり「配景写像では ℓ と m の交点は動かない」も成り立ちますよね．

答． 成り立ちます．

問． 配景写像と単なる写像との違いは，２直線の交点を動かすか動かさないか，ということであると理解してよいのですか？

答． 「単なる写像」ではなくて,「射影」と改めれば，そう理解してよいです.「２直線の交点を動かさないような射影が配景写像である」ということです．

問． 「配景的」とは,「カベにうつった影」あるいは「鏡に写った虚像」のようなものと考えて良いのでしょうか？

答． 良いです．ただし，講義で扱っているのはあくまで平面図形ですが．

問． ユークリッド幾何と射影平面は全く別のものと考えて良いのに，デザルグやパップス，パスカルの定理を射影幾何で証明するということは，なぜできるのですか？

答． 同じ名前がついていても，ユークリッド幾何と射影幾何とでは全く違う定理であると考えてください．射影幾何では，射影平面の上で，射影直線や射影平面の点に関する定理を扱ってい

るので，ユークリッド幾何での定理とは当然別のものです．別のものですが，普通の平面は射影平面に埋め込まれ，たとえば射影幾何でのデザルグの定理からユークリッド幾何でのデザルグの定理が導かれるので，同じ名前を付けたわけです．うまい「たとえ」が思い浮かばないのですが，ザ・タイガースの歌う「花の首飾り」と，井上陽水の歌う「花の首飾り」は，同じ名前がついているけれど，違いますね．それと同じです．

問． なぜデザルグの定理が平面射影幾何の公理となるのですか？定理が公理になるのは不思議な感じがします．

答．「デザルグの定理」は，この講義で扱っている射影平面の上では成り立つのですが，公理だけからは証明できないし，実際に反例があります．ですから，射影幾何の公理系 I, II, III, IV のもとでは，定理ではないわけです．そのとき定理は定理でなくなった．だから,「デザルグの公理」と呼ぶべきかも知れませんね．

問． 射影幾何では微分や積分を使いますか？もし使うなら例を１つ出してください．

答． ２次曲線の接線程度のことなら扱いますが，ここではあまり使いません．ただし，たとえば「射影微分幾何」といった分野があり，そこでは使います．

問． 線形性とは何ですか？

答． ベクトルの足し算とスカラー倍が自由にできるということです．写像 (関数，変換) のグラフが線の形をしているということです．１次式で定義されているということです．

問． １次変換の意味がわかりません．

答． 変換式が１次同次式で表される変換です．このような変換 T はその線形性 $T(\mathbf{x}+\mathbf{x}') = T(\mathbf{x})+T(\mathbf{x}'), T(c\mathbf{x}) = cT(\mathbf{x})$ で特徴付けられるので，線形変換とも呼びます．

問． 関数と写像は関係ないものなのでしょうか？

答． 関係ないどころか，関数は写像の一種です．現代数学では，すべてのものは,「集合と写像」の言葉で表されます．

問． 原点という考えは，どういう時につかうのですか？

答． 座標を決めているユークリッド空間 (デカルト空間とも言う) で使います，射影平面全体を考察しているとき，原点はありません (考えません)．

問． なぜ円錐を平面で切ると２次曲線になるのですか？また，どんな２次曲線でも円錐と平面で表されますか．

答． 円錐が「２次曲面」(２次式で表される曲面) だからです．もちろん，その平面と円錐の上にあるような曲線しか表されないのですが，２次曲線は，楕円，放物線，双曲線，(それに，２直線，と，平面上で $x^2+y^2=0$ で表されるような１点，と空集合) という種類がありますが，平行な２直線と空集合以外は，すべて円錐と平面で表されますね．(ここでいう平面はふつうの平面です)．

問．「図形と数は密接な関係がある」とありましたが，言葉が抽象的すぎてよくわかりません．

答． 具体的に，一辺の長さが１の正方形の対角線の長さは，無理数がないと表されません．また，講義で扱っている１次変換の定義式はすべて数で表されていますね．複比も数です．これでどうでしょうか？

問． 僕は物工の学生なので，図学の授業があるのですが，そこで使われているのは，おそらく平行に光りを当てて考えているので，ユークリッドの方に近いものだと思います．中学の時とかに使っていたキャビネット図は大きくわけるとどちらになるのでしょうか？

答． どちら，というのは，ユークリッド幾何的か射影幾何的か，ということですね．場合によ

ると思われます．キャビネットを描く場合でも，遠近感 (立体感) を出したいときは，遠くのものを小さく描くので，射影幾何的になります.「寸法」を正確に平面に図示したいときは，当然ユークリッド幾何的に描くことになると思います．ところで,「物工」とは，物理工学のことですか？

問．今日のテレビゲーム等のプログラムの中で射影幾何は使われていないのですか？また使えますか？

答．詳しくは知りませんが，コンピュータ・グラフィックスの世界では射影幾何が不可欠なので，テレビゲームでも，基礎的な部分で使われていると思います．これからは，さらに応用できると思うので，ぜひ挑戦してください．ところで，コンピュータ・グラフィック界の TEX と呼ばれているソフト「Povray」のことを知っていますか？

問．「射影幾何 = ガウスの非ユークリッド幾何」なのでしょうか？

答．違います．ガウスの非ユークリッド幾何では「長さ」という概念が中心ですが，射影幾何では，直線だけが出てきて,「長さ」は考えていないですね.

問．平行線が２点以上の交点をもつ世界は無いのですか？

答．たとえば，球面上で，大円を直線とみなせば，２つの直線は，２点で交わります．その２点は，丁度「対心点」になるので，その２点を同一視すると，射影平面が得られ，２つの直線が１点で交わると考えられます.

問．ローレンツ変換がよく分かりません.

答．(x, y, z, t) 空間の変換です．４次元空間の特別な形をした変換です.

問．４次元とはどんなものなのでしょうか？そう言えば，アニメ「ドラエもん」の道具の１つに「４次元ポケット」というのがありますよね．あのポケットの設定は，厳密に「４次元」になっているのですか？

答．時間を飛び越えるということで，４次元なのではないでしょうか？

問．複素数平面を２つ組み合わせると４次元になりますか？

答．なります．$\mathbf{C}^2$ と表しますが，これは，実次元が４次元です.

問．「マイナス次元」とか「虚数次元」などという考え方はあるのでしょうか？それから，複素数を n 次元で考えても面白いと思います.

答．「マイナス次元」とか「虚数次元」は，今のところ使われていないと思います．複素数を n 次元で考えることは，数学では日常茶飯事です.

問．テニスボールを裏返すことは数式で表されますか？

答．質問の主旨とあっているかどうかわかりませんが，実は球面を裏返す (自己交差は許すが, 角 (かど) を作らないで裏返す) ということは，可能であることが証明されています．微分トポロジーという分野で有名な話です．実際に裏返す過程を写したビデオも市販されています.

問．$0 \times \infty = 1$ の両辺に 0 を掛けると $1 = 0$ が導かれるとはどういうことですか？

答．前提として不合理なことを仮定しているので，不合理な結論が導かれてしまう，ということです．仮に $0 \times \infty = 1$ という等式が成り立ったとすると，$0 \times (0 \times \infty) = (0 \times 0) \times \infty = 0 \times \infty = 1$ が $0 \times 1 = 0$ に等しいということが導かれるということです.

問．平面を埋める方法は３種類あるそうですが，有名な話でしょうか？

答．たぶん，そのうちの１種類は「ペンローズのタイル張り」のことだと思います.

問．クラインの壷の模型は実際に作ることが可能なのですか？

答．可能です．自己交差は許した模型ですが.

問． 数直線上の点と実数は１対１対応しますか？

答． 対応します．

問． $\sqrt{n}$ が無理数である条件を考えてみました．n が無理数である，または，n が平方数でない，のどちらかが言えればよい，と考えたのですが，いかがでしょう．

答． 間違いではないですが，$\sqrt{n}$ が無理数であるような自然数 n を特徴づける問題なので，はじめから n は自然数としてください．それから，条件をより明確に書いた方が良いと思います．n が「平方数でない」という条件は，n を素因数分解したとき，どういう条件になるでしょうか？

問． π とは一体何なのですか？

答． 単位円の円周の長さの $\dfrac{1}{2}$ です．

問． ケーリーさんが何をやった人なのか良く知りません，いったいどんな人なのですか？

答． ケーリー先生を知らないなんて信じられませんね．１９世紀に活躍した数学者であり法律家です．全部で十数巻からなるケーリー全集が出版されています．ケーリー・ハミルトンの定理の他，ケーリー変換，ケーリーの８元数，超行列式，など数学の広い分野で，オリジナルな多くの業績を挙げている人です．ちなみに，私の研究室の Mac のコンピュータの名前は Cayley 君です．

問． 平面幾何という学問は，昔の日本にもあったのですか？なんとなく日本人向きの学問ではないような気がします．

答． 昔の「算額」(和算で，難問を寺などの額に飾って解けるかどうかを競ったもの) には幾何の問題が多かったので，江戸時代も盛んだったと思います．私は日本人向きの学問だと思っています．

問． 和算とは何ですか？日本の寺子屋が和算の発展に貢献したと聞いたような気がします．

答． 江戸時代に発展した日本オリジナルの数学 (算数?) です．寺子屋とは現代でいうと大学のことでしょうか．

問． 詩人で数学者のポール・ヴァレリーが現実世界から全く異なる世界を作り出すものとして「詩」と「幾何学」を挙げています．私が数学について感じる最も大きな魅力は，ヴァレリーのいう「創造的な学問」であるということです．科学の中でも数学以外のものは「自然のしくみ」を解析する (アインシュタイン流に言えば「悪魔の秘密を解く」でしょうか) だけですが，数学に本当に「創造的」な面があるのなら，それは数学のみが持つ大きな魅力であると思います．

答． 自然のしくみを解析することも十分創造的だと思いますし，数学にも，もちろん創造的な面がたくさんあります．私見ですが，どんな分野にも創造的な面はあると思います．物事を真摯に (手を抜かないで) 考えて生活していけば，当然いろいろ工夫するわけで，その積み重ねが，大きな飛躍につながるわけですね．何もしないで，地道な努力をしないで，手抜きをしていくと，絶対に創造的はことはできませんね．どの分野でも．

問． いまだに射影幾何というものが頭の中にイメージできません．この講義の内容が理解できないことが不安でたまりません．

答． そのうちにできるようになりますよ．いま理解できなくても全然平気です．ちなみに，北大数学教室のホームページ

http//www.math.sci.hokudai.ac.jp/

の教官紹介を参考にしてください．ところで，はに丸くんの馬の名は「ひんべい」だと教えてもらいました．「ひひーん」ということですね．納得しました．ではまた．

第 8 回問答

問．「双対」について，点を直線に，直線を点に，と言われても，その直線はどんな向きなのか，がわかりません．

答． こんにちは．今年は道東に行って，平行線が交わる (ように見える) ことを確認してきたいなあと思っている今日この頃です．さて，回答ですが，もっともな疑問ですね．ここで言っていることは，一般的な命題を書き換えるということです．たとえば,「任意の異なる２点に対し，その２点を通る直線がただ１つ存在する」という命題があったら，その双対命題として,「任意の異なる２直線に対し，その２直線の交点がただ１つ存在する」という命題が作れる，ということです．個々の場合の対応関係は明示していません．ここでは，その具体的な対応を明示しなくても，ある命題が成り立てば，その双対命題も成り立つ，ということを言いたいわけです．それはそれとして，明示することもできます．つまり，射影空間の点 $(a_0 : a_1 : a_2)$ に対し，射影直線 $a_0x + a_2y + a_2z = 0$ を対応させることができます．ここで，射影平面の点 $(a_0 : a_1 : a_2)$ は，零でない空間ベクトル (a_0, a_1, a_2) で定まる「視線」です．それは，空間で，平面 $a_0x + a_2y + a_2z = 0$ を決めますが，その平面の定める射影直線を対応させよ，ということです．

問．「双対」(そうつい) という考え方はどのように生まれたのですか？僕には絶対に浮かばない考え方のように思えます．やっぱり昔の人達はすごいですね．

答． そうですね．双対という考え方は，射影幾何ときってもきれないので，自然に生まれた概念だと思いますが，その際に，上の回答に少し書きましたが，解析幾何 (座標幾何) が果たした役割は大きかったと思います．

問．「双対」という概念はとてもおもしろいものだなと思ったのですが，何を目的にして誰が考えたのですか？三角形の双対は何ですか？

答． 誰が考えたかはわかりませんが，いろいろなことを考えていくと，誰かがいずれ自然に思いつくことであった，と思うのですが，いかがでしょう．ところで，三角形の双対は三角形です．

問．「１点で交わる２直線」の双対は「１直線で結ばれる２点」だと思うのですが,「１点ですら交わらない２直線 (平行)」の双対は，あるとしたら,「１直線で結ばれない２点」となり，どういうものかわからなくなってしまいます．

答． ここでは，直線とは射影直線のことです．ですから，２直線は必ず交点を持ちます．

問． 双対とは私たちが何かを鏡にうつしたもののようなことですか？ドラえもんの「アベコベミラー」では，鏡にうつした世界が，あべこべの定義になっているようです．

答． あくまで，たとえ話です．ふつうの鏡にうつすと左右が逆になりますが,「双対の鏡」に写すと，点と直線が入れかわるということです．ところで，私のまわりの人に聞いてみると,「４次元ポケット」は誰でも知っていましたが,「アベコベミラー」は誰も知りませんでした．

問．「射影幾何では，ある命題が正しければ，その双対命題も自動的に成立する」とありますが，双対と対偶は全く別のことでしょうか．

答． 別のことです.「対偶」は形式論理での話であって，どんな命題でも，その対偶命題はあります．一方，点と直線の「双対」は，射影平面幾何に限った話です．

問．「論理」でいう「命題の対偶」というものは双対の一種と考えてよいのでしょうか？

答． 別のことですが，論理と射影幾何に類似性がありますね．対偶を作ることとは違いますが，命題 P を，その否定命題 $\neg P$ に置き換え,「かつ」を「または」に対応させると，論理的あべこべの世界ができますね．真が偽になり，偽が真になり... 論理と関連して,「ブール代数」というものがありますが，それと射影幾何は関連します．有名なフォン・ノイマンは，射影幾何を一般

化して「連続幾何」というものを作ろうとしましたが，失敗したと言われています．

問． 射影幾何で命題が正しくても，その双対命題が正しくない場合はあるのでしょうか？

答． 射影幾何で命題が正しければ，必ずその双対命題も正しいのです．なぜなら，その命題の証明を，機械的に書き換えれば，双対命題の証明が出来上がるからです．

問． 証明の時は,「双対より成り立つ」というような書き方ができるものなのですか？

答． できます．もちろん，双対についてもう少し時間をかけて，正しく理解した後で，そのような書き方をすることをお勧めします．

問． 平行線の双対はどうなるのですか？

答． 双対は射影平面で考えているので，平行であるとか平行でないとか，という区別はありません．

問． 点 P を通るペンシルと点 P' を通るペンシルを考えたとき，点 P を通る，軸と平行な直線をひいたとき，点 P' を通り軸と平行な直線が対応していると言えるのですか？

答． 良い質問ですね．言えます．軸 (これも１つの射影直線) の上の無限遠点を介して，対応します．

問． 射影幾何に平行という概念が無いというのはわかっているのですが，射影平面ではどんな２直線でも，ユークリッド幾何の「平行」となりませんか？たとえば，射影平面で自分の立っている真下で，２直線が交点を持っているとします．射影平面では，平行な２直線でも無限遠点で交点を持つということなので，この場合，自分の立っている場所が無限遠点であると考え，この２直線も平行であると言えませんか？

答． 良い発想ですね．細かい部分は正確でないですが，おおよそ正しい指摘です．射影平面は，いたるところ均質であり，実は，無限遠直線とその他の射影直線を区別することはできません．

問． 「射影直線はどの場合でも直線に１点を余分に付け加えたもの」とはどんな意味ですか？

答． 普通の平面上の直線の場合，その直線の方向の無限遠が１点付け加えられます．

問． 射影平面での無限遠点と複素球面での無限遠点は違うものですか？

答． 違うものです．現代数学の記号を使うと，$\mathbf{R}P^2$ と $\mathbf{C}P^1$ は違う空間です．そして，$\mathbf{R}P^1 \subset \mathbf{R}P^2$ は「円周」と「同相」だが，$\mathbf{C}P^0 \subset \mathbf{C}P^1$ は１点からなるということです．

問． 「結ぶ」とは，どういうことですか？

答． ２点を結んで直線を引く，ということです．ところでこの回答を書いているとき，突然「あの娘 (こ) の作った塩結び (しおむすび)」という，昔の歌謡曲の歌詞をなぜか思い出しました．失礼しました．

問． ある１点を通る直線の集まりを，なぜペンシルというのですか？英語ではペンシルには,「鉛筆」という意味の他に「束」という意味があって，その「束」という意味をとって「ペンシル」と名付けたのですか？

答． その通りです．

問． 「ある１点を通るような直線の集まり」とありますが，何本以上の直線でペンシルと呼ぶのですか？

答． ある１点を通るようなすべての直線をペンシルと呼びます．ですから，無数 (無限個) の直線の集まりです．

問． 直線上の無限個の点と直線は同じものですか？

答． 良い質問ですね．区別しています．たとえると，日本国民と日本国の違いのようなもので

す．個々のメンバーと全体の組織という違いがあります．ですから,「直線から直線への射影」と言っていたことは，詳しく言えば「直線上の点の集まりから直線上の点の集まりへの射影」となります.

問．直線の双対は，平面ということになりませんか？直線は「点を無限個だけ直線上に並べたもの」と言えると思います．それは,「無限個の点が同一直線上にある」ということなので，その双対は「無限個の直線がある１点で交わる」ということになると思います．これは平面のことなのではないでしょうか？

答．確かに平面を埋めつくしますが，平面そのものではなく，あくまで直線の集まり (ペンシル) です.

問．「双対」とは，点を直線におきかえ，直線を点におきかえるものだというのはよいのですが，では,「直線を平面に」とか,「平面を空間に」という置き換えはないのでしょうか．たとえば，３「直線」が一「平面」上にある，の双対が，３「平面」が一「直線」上に交わる，とか. ３次元空間でも双対という考え方はできるのですか？

答．よいところに気がつきましたね．できます．射影立体幾何，あるいは３次元射影幾何ではそのような双対があります．一般に n 次元射影幾何では，r 次元部分射影空間の双対が，$n-r-1$ 次元部分射影空間になります.

問．なぜふつうの平面で配景写像という概念がとり入れられなかったのかがわかりません.

答．点 P を中心とした ℓ から m の配景写像を定義する際，ℓ の点 Q に対して，直線 PQ が m と平行になるとき，交点がなく，配景写像が定義されないからです．必ず「射影平面」において考えなければいけません.

問．太陽と水面にうつる太陽は，地平線を軸として配景的であると言えるのでしょうか？

答．円は，線分で表されない図形なので，定義していません．しかし，たとえば，円の接線を考えるなどして，定義を拡張することは可能です.

問．n 角形，円，曲線さらには立体の双対というものは存在するのでしょうか？

答．存在します．それを説明するには，もう少し数学的な準備が必要なので，ここでは述べられませんが，存在します.

問．固有２次曲線と直線の交点がたかだか２点しかないというのは間違っているような気がします．双曲線も固有２次曲線ですよね．双曲線と直線が４点で交わる場合があると思うのですが.

答．間違っていません．確かに双曲線も固有２次曲線ですが，双曲線と直線の交点は，多くても２点です．質問書に双曲線の図を書いてありますが，その図は正確ではありません．交点が４点あることはありません.

問．双対という概念は，幾何学だけのものなのですか？代数や他の分野に応用できないのですか？

答．応用できます．実際，射影幾何の双対に基づいて，代数でも解析でも「双対」という考え方ができました．たとえば,「双対ベクトル空間」というのを知っていますか？

問．配景写像を使う時，基準点から外側に配景写像を使っても，外側から基準点のほうに適用しても良いのですか？

答．そうです．２直線と基準点 (配景写像の中心) の位置関係は，その点が直線上にない限り，どこにあっても良いのです.

問．「直線を軸として配景的」というのがわからないです.

答．デザルグの定理の結論を参考にしてください．ちなみに，双対をとれば，点を中心として

配景的ということになります.

問． 2回配景写像をしたときの2つの軸だけで，同じ写像を1回だけにするときの軸を作図できますか？

答． できません．1回の配景写像では表されない射影があるからです．少なくても2回配景写像を続けなければなりません．(実は2回で十分).

問． デザルグの定理で，辺 CB と辺 FE が平行なとき，$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ はある点を中心として配景的ではないと言うのですか？

答． 平行であろうとなかろうと，定理の仮定をみたしていれば配景的です．思い出してください．射影平面ではたとえ平行な直線であろうと交点が存在します．定理の結論は，3点 P, Q, R が一「射影直線」上にある，ということです.

問． 配景写像は日常生活においてどのように使われているのですか？趣味で，定理を証明したりするとき以外では，日常生活では使わないのですか？

答． 個人差がありますが，皆さんが物を見るとき，配景写像を使っていますね．物をみることは日常生活に入りませんか？絵を描くときにも配景写像を使いますね．日常生活では絵を描きませんか？コンピュータのゲームソフトでは，遠近感を出すために配景写像を使っています．日常生活でゲームはしないかな．ところで趣味は大切です．趣味のない日常生活ほど味気ないものはありません．趣味のない日常生活なんて考えられませんね．趣味に限らず「精神生活」は大切です．ものごとを知る，理解する，ということの楽しさは何ごとにも替えがたいものですよね.

問． 球面で考えたとき，無限遠直線というものは，どのようなものになるのですか？まったくイメージできません.

答． 赤道の部分です．それを前後で区別しないものです.

問． 僕は道東の中標津出身，札幌育ちなんですが，道東の方に行くと，よく平原に直線道路一本だけが地平線に向かっていく風景が見られます．必ずしも厳密にこの道路が直線とは言えないかもしれませんが，地平線では道路の両端が必ず一点で交わります．(「射影平面では2平行線が交わる」という) イメージとしては合っているのですか？

答． そういうことです．地平線に地面はないのですが，そこに”あたかも”点がある (方向によって無数にある，無限遠直線がある) と考えたものが射影平面です.

問． 4次元空間の原点を通るものは射影空間でいうと立体を表しますか？

答． そうです．$\mathbf{R}^4$ の原点を通る直線の全体は，いわゆる「3次元射影空間」と呼ばれるもので，$\mathbf{R}^3$ に「無限遠平面」を付け加えたものと考えられます.

問． 拡大，縮小は写像の特殊なものと考えてよいのでしょうか？

答． その通りです.

問． 質問の回答にあった「球面を裏がえす」というのがわかりません．球面が見ためには表面がおおわれているので，裏側が表に出てくるということが想像できません．それは3次元で行われていることなのでしょうか？普通にやったらどうしても裏が表に出てくるために最低でも穴が一点はないと不可能に感じるのですが.

答． そう感じるのはもっともですが，直感に反することも数学の事実として証明されることがあるということです．ただし，ここで「球面を裏がえす」ときに，前回の回答に書いたように自己交差は許しています．たとえば，球面の北極と南極を指で押していって，自己交差させて，裏返る一歩手前までは行けるわけです．でも，その先が，常識では考えられない，でも角 (かど) を作らないで裏返すことが実は可能であるということがわかっているということです.

問．「複素数平面を２つ組み合わせると４次元になりますか？」という質問の答えで,「なります.」と書いてありましたが，もう少し説明をお願いします.

答．次元とは，その空間を記述するのに必要にして十分なパラメーターの個数のことです．複素数平面は，２次元です．複素数 $x+iy$ の実部 x と虚部 y の２次元です．複素平面を２つ組み合わせて $\mathbf{C}^2$ を作ると，２つの複素数 $x+iy, u+iv$ の実部 x, u と虚部 y, v の４次元になります．ところで，通俗書には，４次元とは，縦横高さと時間である，などと書いてありますが，何もそれに限るわけではありません.

問．ドラえもんが４次元ポケットを開いたとき，４次元と３次元が交わりますが，どうなっちゃうのでしょうか？

答．私は,「おじゃる丸」には詳しいのですが，ドラえもんには詳しくないので,「４次元ポケット」をよく知らないのですが，次元が高いので，なんでも入るポケットということですね.「４次元と３次元が交わる」ということは，たとえば，３次元空間を平面で切り取るということと同じで，何も問題ないと思います．ドラえもんは懐が深く，奥行きのあるネコであるということでしょう.

問．１次元，２次元，３次元とはよく聞きますが，何次元まであるのですか？

答．何次元までもあります．では,「どこにあるか」と聞かれたら，それが想像力のすばらしさだ，と答えます．たとえば，統計の分野では，100 個の種類の違う独立なパラメーターがあれば，それで，100 次元空間を扱うことになります．実生活で皆さんも高次元空間を毎日使っています.「良心はどこにある．君のこころの中にある」.

問．n 次元と言ったとき，その軸のとり方は n によって１種類しかないのですか？たとえば,「高さ，時間」だけを軸とした「２次元」ということになるのでしょうか？

答．次元というのは「記述するのに必要かつ十分なパラメータの数」なので，軸のとり方も無数にあります.

問．自然対数の底である「e」は，どうやって見つけられたのですか？$e = 2.718\cdots$ であることを昔の人はどうやって調べたのですか？

答．「ネピアの数」とも呼ばれています．この数の発見の歴史的な経緯はともかく，自然に発見されたのだと思います．その根本的な性質は，微分を学ぶと必ず出てくる式 $(e^x)' = e^x$ にあります．微分というのは自然を記述するのに不可欠であることは御存じだと思いますが，微分しても変化しない関数を表そうとすると，どうしても e という数が必要になります．それから，e の小数点展開の求め方ですが，たとえば，$e = 1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} + \cdots$ を使えば，近似値が求まりますね.

問．ビッグバンが起こる一瞬前，そこは全てのベクトルが 0 だったはずですね．それだったら，もしかしたら，この宇宙と全く逆の宇宙がどこか見えないところに (すぐ裏にあるかも) あるかもしれないじゃないですか.

答．わかりません．ところで，裏とはどこの裏にあるのでしょうか.

問．虚数 (時間)，複素数 (平面) は実在している (た) のですか？ホーキングが提唱した理論では，宇宙の誕生前は，虚数時間が流れていたといいます.

答．「実在」しているかいないか，ということは，意味がはっきりしていないので，数学的に答えることは不可能なのですが，その概念が不可欠かどうか，という点で言うと，複素数や複素数平面の概念は不可欠です．そして，実社会でも毎日使われています．ただし,「時間」という概念の扱いは難しく，ホーキングの理論の検証もできていないので,「虚数時間」の概念が，本当に

われわれにとって不可欠な概念かどうかについては，もう少し学問の発展を待つ必要があるようです．ところで,「誕生前」とか,「実在していた」という言葉づかいは，虚数時間の概念にはあっていないと思いますが，いかがでしょうか．

問． なぜ三角比，三角関数と呼ばれているのですか？$\sin 270^\circ = -1$ のとき，270° とはどこにあるのでしょうか？辺の比なのに負の数とはどういうことでしょうか？

答． 歴史的に三角形をもとに定義されたので，今でもそう呼ばれています．その概念の実体が変わっても名前が変わらないことはよくあります．名前は「しっぽ」のようなです．ひきずります．たとえば，懐 (ふところ) に入れるわけでもないのに懐中電灯 (かいちゅうでんとう)，ゲタもないのに下駄箱 (げたばこ)，飛行機で運んだのに舶来品 (はくらいひん)，紋付なと持っていないのに衣紋掛け (えもんかけ)，など，皆さんは使わないとは思いますが，つい最近まで使われていた言葉です．

問．「Povray」はわからないです．「Shade」とか「六角大王」みたいなものですか？

答．「Shade」とか「六角大王」とはどんなものですか？

問．「ペンローズのタイル張り」とは何ですか？

答． 高次元空間に書かれた格子点を，平面にある方向から射影して得られる平面の分割です．規則性のない分割の仕方として注目されています．ちなみに，ペンローズという人は，宇宙物理で，ツイスター理論を提唱し，ホーキングと仕事をして宇宙の特異点の研究をしたり，量子力学をつかって，人の心を調べようとしている多才な人です．

問． ケーリー・ハミルトンの定理に名を残すハミルトンという人はどんなことをした人なのですか？

答． ハミルトン力学やハミルトンの４元数で有名な数学者です．物理系を記述するのに，まずその「ハミルトニアン」を見つけるということをよくやりますね．

問． 和算と洋算の違いは何ですか？

答． 本質的な違いはないと思いますが，やはりギリシャ生まれの論証性は，和算に足りなかったのかもしれません．論証性が足りないと，普遍性がなくなり，応用もできず，本当に恣意的に「趣味的」になってしまったのかもしれません．でも，現在，和算に関する研究が進んでいるので，その研究成果に注目していきたいと思います．それとは別に「そろばん」の存在は偉大で，日本の経済的発展を底辺で支えてきたという意義があります．私も子供のころ，そろばんを習いました．３級までは行けなかったけれど... ところで，和食と洋食の違いは，和食が健康的で洋食が不健康的である，ということでしょうか．私は，とくに最近，年のせいか，和食が好きになりました．和服と洋服の違いは，趣味的か実用的か，ということでしょうか．和服も着こなせるようになりたいと思っています．和食器と洋食器では，和食器のほうが融通がきいて使い勝手が良いですね．和楽 (邦楽) と洋楽では，邦楽の方が癒されますね．モーツァルトも好きですが．和画 (邦画) と洋画では，絵画も映画も洋画の方がおもしろいですね．「男はつらいよ」は好きでしたが．

問． トポロジーが現代社会でどのように活用されているか教えてください．むかし，駅の料金表などはトポロジーを使っているような話を聞いたことがあります．

答． トポロジーは図形のつながり具合を調べる幾何学なので，たとえば，回路や配線に応用されます．路線図も，実際の距離よりも,「どうつながっているか」だけが問題となるので，トポロジーの問題であると言えます．また，たとえば,「セールスマン巡回問題」など，一見図形の問題ではないようなものも図形化してトポロジーを応用するといろいろおもしろいことが言えたりし

ます.

問. 抽象的なことを理解するためには，日頃どのような勉強をすればよいのですか？回答書の中に「小学生にもわかるように...」と書いてあったところに，平面を理解するためには，それなりの抽象能力が必要と書いてあったのですが,「それなり」以上の抽象能力がなくては，きちんとした理解が生まれないと思ったのですが，どのように日頃から訓練したらよいのでしょうか？

答. 「訓練」というと軍隊のようで好きではないですが，どんな身近なことでも「ものごとの仕組み」を見極めようとすると良いかなと思います．でも，誰でも日々の経験から抽象能力が必然的に鍛えられるということも確かです．恋，仕事，夢，希望，お金，誇り，過去，未来，幸福，老い，死,... 平面 (無限に広がる平面) を理解するのは，小学生には無理でも，普通に生活している大人なら十分に可能だと思うのですが，いかがでしょう．ところで，大阪難波の日本橋には，大きな家電街があるそうですね．東京の秋葉原，京都の祇園の南もそうですね．他の町のことは知りませんが．また，札幌の梅雨もどきはどれくらいまで続くんでしょうか？という疑問が寄せられました．私は以前から,「北海道に梅雨がない」というのは嘘である,「北海道にも梅雨がある」と思っています．また，東大寺の日光月光菩薩とは何ですか？という質問をもらいました．ぜひ，奈良の東大寺の三月堂を訪れてください．心が洗われるようですよ．それから,「徹子の部屋」に三波春夫さんの息子さんらしき人が出ていました．残念ながらビデオはとれませんでした．という情報が入りました．ビデオにとる程のことはないと思います．それから，マッド・ディモン主演の映画「グッド・ウィル・ハンティング」で，奇妙な数学をやっていたのですが，どのようなものなのかわかりますか？という質問がありました．見ていないのでわかりません．ところで，先日行きつけの床屋で，雑談しているときにもこの映画のことが話題になり，ぜひ見てみたいと思っていました．近日中に実現します．と，ここまで書いた後で，週末にビデオを借りてきて見ました．ロビン・ウィリアムスも出演していましたね．養父から虐待を受け，心に傷をもち，粗暴な生活を送っている孤独な若者「ウィル」が数学の才能を見い出され，いろいろな出会いを通して，人間的に成長し，新たな人生への旅立ちをする，という映画ですね.「人生とは何か」ということを描いたおもしろい作品ですね．でも数学の部分は，残念ながらお粗末でした．たとえば「ウィル」が，フィールズ賞を受賞した数学者の提出した問題を解くところがありますが，黒板１枚に，４次行列の３乗 (?) などを計算して，重要な問題がすぐに解けるほど，現代数学は単純ではありません．まあ，文系の学問よりは数学は単純な学問なので，天才なら，２〜３年ぐらい修行期間があればなんとかなるかもしれませんが，とても映画のようには行きませんね．インド出身の数学者ラマヌジャンのことを少し思い出しました．映画はもちろん虚構ですが，質の高い虚構を描くには，細部に手を抜かず，リアリティーが求めないといけませんね．それに，数学とは関係ないですが，やたら「ファック」という英語の会話には少しだけ辟易 (へきえき) しました．でも，この映画をみることができたのも，皆さんにいろいろ教えてもらったお蔭だと感謝しています．この機会がなければ見逃していたと思います．一期一会．痛みに耐えてよくがんばった，感動した．ではまた.

第９回問答

問．２次曲線の定義が，高校で習った定義と違うようです．どういうことなのでしょうか？ペンシルからペンシルへの射影を使った楕円の定義と，高校のころ習った楕円の定義には違いがあるのでしょうか？

答．こんにちは．違いがわかる人間になりたいと思いながら，ネスカフェ・ゴールドブレンドの CM を昔から (遠藤周作氏のころから) 見ています．さて，回答ですが，導入が違うだけで，本質的に同じ対象です．ここでは，２次曲線を「射影」という考え方を中心に紹介したかったので，講義で紹介したような定義の仕方になりました．２次式で定義される曲線 (この講義では「２次代数曲線」) と定義してもほぼ同じことです．ただし，射影平面上では，楕円も双曲線も放物線も区別しません (区別できません).

問．双曲線をのばしていくと漸近線と交わるのでしょうか？

答．無限遠点で交わります．つまり射影平面内では交わります．普通の平面上では交わりません.

問．２次曲線はどうして２次曲線というのですか？プリントの「上の意味の２次曲線は２次代数曲線であり」とはどんな意味ですか？

答．２次式で定義されることがわかるからです．ペンシルからペンシルへの射影から定まる曲線は，２次式で定義される，という意味です.

問．２次曲線の式 $ax^2 + by^2 + cxy + ex + fy + d = 0$ の式は，たとえば，だ円という図形を調べてこの式にいきついたのか，先に式が定義されたのか，どちらなのですか？

答．推測ですが，楕円があり，それが２次式で表されたことから，２次曲線の重要性が認識された，という流れだと思います.

問．平面幾何の世界で２次曲線 (楕円) の定義はいくつ存在するのですか？

答．よい質問ですね．数学で基本的な対象なので，定義の仕方もたくさんあります．いくつ存在するか，と尋ねられたら，いくらでも存在する，と答えます.

問．高校での授業で習った楕円，双曲線の性質は，楕円は，２定点 (焦点) からの距離の和が一定，双曲線は，焦点からの距離の差が一定というものでした．このような性質は射影幾何の観点からどのように説明するのでしょうか？

答．射影幾何では，長さや距離は使いません．射影変換のもとでは，距離が変わってしまうからです．ですから，楕円や双曲線の距離を使った定義も採用しません．事実，射影平面内では，楕円と双曲線を区別しません.

問．退化した２次曲線は，どのような式で表されるのですか？

答．定義式の２次式が１次式の積に分解するような場合です．つまり，$(ax+by+c)(a'x+b'y+c') = 0$ という形の式です.

問．直線は曲線の一種ですか？固有２次曲線でない２次曲線は,「２直線からなる」という時点で，曲線ではないと思います.

答．直線は曲線の一種です．曲線はいろいろありますが，その非常に特別なものとして直線があります．ちなみに，平面は曲面の一種です．したがって，２直線も曲線の一種と考えるので，２次曲線と呼んでもおかしくありませんね.

問．「固有二次曲線上の３点は同一直線上にはない」ということは，図から見て直感的にわかり，その証明も理解したつもりですが，先生の言っていた,「複素平面で考えると３点で交わる」というのがわかりません.

答． 楕円と直線の交点の個数のことですね.「複素平面で考えると３点で交わる」ではなく,「複素平面で考えると (重複度をこめて) ２点で交わる」と言ったつもりでした．楕円の内部を通る直線なら当たり前ですが，楕円の外部を通過する直線についても，複素平面の範囲まで考えると，交点が２点生じます．ここで，複素平面と言っているのは,「複素数平面」$\mathbf{C}$ ではなく，$\mathbf{C}^2$ (あるいは $\mathbf{C}P^2$ です)．ここでのキーワードは「複素化」です.

問． 固有２次曲線上の３点は同一直線上にはないということですが，本当にないのですか？一般式からみれば，$a=0, b=0, c=0$ のときは，$y=Ax+B$ の形となり，直線の式で，同一直線上に無限に点をとることが可能になります.

答． 本当にないです．直線は,「固有」２次曲線ではないことに注意しましょう.

問． ３点は同一直線にはない２次曲線は固有２次曲線であるという逆は成立しますか？

答． 良い質問ですね．成立します．ある２次曲線について,「３点は同一直線にはない」とすると，その２次曲線を定めている射影は，配景写像ではありえないから，配景写像以外の射影であり，定義により，その２次曲線は固有２次曲線です.

問． 直線と固有２次曲線の交点が１点の場合はないのですか？接線になる場合など，１点になる時はあるのではないでしょうか？

答． その通りです．あります．交点は「たかだか」２点ということです.

問． 「たかだか」という表現は,「多くても」と同じ意味ですか？

答． 同じ意味です.

問． ペンシルからペンシルへの射影が与えられたとき，対応する各直線の交点を描く軌跡 (２次曲線) の作図の仕方がよくわかりません.

答． 作図はできません．われわれは定規しか使えないからです．頭の中で想像してください.

問． ２次代数曲線は２次曲線の定理において，固有曲線を特定するのに，５点が必要である，という部分がわかりません.

答． ２次曲線の全体の中で特定できるということです．たとえば，楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ を決めるには，２次代数曲線 $ax^2+by^2+cxy+ex+fy+d=0$ の中で，a,b,c,e,f,d の連比が，$1,\dfrac{1}{4},0,0,0,1$ と決める必要があり，そのためには，５つの連立１次式が必要であるということです.

問． ２次曲線は２次式で表されるけど，実際は線だから１次元なのですか？

答． その通りです.「２次元曲線」ではなく「２次曲線」です．曲線の「次数」が２ということです.

問． n 次曲線上に直線を引くとき，交点は最大で何本できるのですか？

答． 交点は最大 n 個です．ところで，射影平面の点は，３次元空間で言うと直線だから,「何本」と尋ねているのですね.

問． ペンシルの双対は直線なのですか？

答． １直線上にある点のあつまりです．レンジ (range, 連珠) と言います.

問． ペンシルの概念がわかりません.

答． ペンシルは「直線の集まり」です．ペンシルは集合であり，その要素は直線です.

問． ペンシルからペンシルへの配景写像はわかるのですが，ペンシルからペンシルへの射影というもののイメージがどうしてもつかめません.

答． そうでしたか．平面上の３点 P, Q, R と配景の軸を２本 ℓ, m を任意に書いて，(1) 点 P を通る直線を３本引き，(2) それと直線 ℓ の交点を求め，(3) それらの交点と点 Q を結んで，(4)

できる直線たちと直線 m の交点を求め，(5) それらと点 R を結べば，射影の作図のハイ出来上がりです．

問．「直線 OO' を直線 OO' に写すならば，その射影は...」というところがわかりません．１つの線を同じ線に写すというのはどういうことですか？

答．ここで言っている射影というのは,「点 O を通る直線のなす集合から点 O' を通る直線のなす集合への写像」です．点 O を通る直線のなす集合 (ペンシル) の要素は直線です．点 O' を通る直線のなす集合 (ペンシル) の要素も直線です．１つ１つの直線がメンバーです．その O を通るそれぞれの直線が，O' を通るどれかの直線に対応するということなので，その両方の集合に属している直線 OO' が直線 OO' に写されることもあるわけですね.

問．パップスの定理の双対定理は次のようで良いのでしょうか？「直線 ℓ, m, n が点 P で，直線 ℓ', m', n' が点 Q で交わるとき，直線 ℓ と ℓ' の交点を a, 直線 n と m' の交点を b，直線 m と ℓ' の交点を c，直線 n と n' の交点を d，直線 m と m' の交点を e，直線 ℓ と n' の交点を f としたとき，直線 ab, cd, ef はある一点で交わる」.

答．まったくその通りです．感激しました.

問．２次曲線の双対を考えることはできないのですか？

答．できます．その接線の双対を考えます．各接線の双対は射影平面上の点なので，それらは曲線を形成します．それが「双対曲線」と呼ばれるものです.

問．２つの円錐を使った２次曲線の発見はいつごろですか？円錐曲線という考え方は，２次曲線を考えるために生まれたものなのですか？

答．ギリシャ時代だと思います．円錐曲線が先にあり，その後，円錐曲線を２次曲線として理解した，というのが歴史の流れだと思います.

問．円錐曲線自体は式で表すことができるのですか？

答．できます．円錐を $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ で表し，平面を空間に埋め込む写像を $(x, y) \mapsto (ax + by + c, a'x + b'y + c', a''x + b''y + c'')$ とすると，その平面と円錐の切り口を，xy 平面上で表す式は，$(ax + by + c)^2 + (a'x + b'y + c')^2 - (a''x + b''y + c'')^2 = 0$ となります．これを展開すると，２次代数曲線であることがわかります.

問．円錐を，接平面で切ると，１直線になると思いますが，それも２次曲線 (円錐曲線) と言えるのですか？

答．言えます．見た目は１直線ですが，２本の直線が重なっていると考え，２次曲線と考えます．xy 平面で言うと，式 $x^2 = 0$ で定まる曲線です.

問．２次曲線の空集合とは何ですか？$x^2 + y^2 = -3$ のように x, y が虚数になるときのことですか？

答．その通りです.

問．$ax^2 + by^2 + cxy + ex + fy + d = 0$ の式で表される曲線で，$a > 0.b > 0, c = e = f = 0, d > 0$ のときはどんな曲線を描きますか？

答．空集合です.

問．４次曲線は２次曲線以上のバリエーシュンがあるのですか？

答．もちろんあります.

問．無限遠直線と呼んでいるものは「無限遠平面」ではないのですか？

答．無限遠直線でよいのです．１次元的なものなので，平面ということはできません.

問．射影平面の点は，空間ベクトルで定まる「視線」というのがわかりません．どこから誰が

見ての視線なのですか？

答． 原点から君が見ます.

問． 直線が２本あれば，一方はある直線を軸とした，もう一本の配景写像であると必ず言えると思うのですが，どうですか？

答． 任意の直線 ℓ から，任意の直線 m への配景写像が必ずあるか，という質問だと思いますが，ℓ と m 上にない点をとれば，その点を中心とした ℓ から m への配景写像がありますね.

問． 太陽は１つの点と考えて，そこから出た光が地球に届くときは，平行光線となっていると習いました．ということは，現実世界が射影の世界になっている... ?! 平行線 (光線) が１点 (太陽) で交わっています!! 発見.

答． なるほど．ところで，太陽光線が平行線というのは，太陽がとても遠くにあるので「ほぼ平行線に近い」ということだと思います．厳密には平行ではないでしょうね.

問． ２直線が重なったとき，その２直線は「交点」を持っていると言えるのですか？

答． 言えます.

問． 射影幾何の空間への拡張はありますか？

答． もちろんあります．n 次元であります.

問． n 次元空間に対して，$n-1$ 次元の射影「空間」なるものを定義できるのでしょうか？

答． 定義できます．$\mathbf{R}^n$ の１次元部分ベクトル空間からなる集合として，$n-1$ 次元射影空間 $\mathbf{R}P^{n-1}$ が定義されます.

問． ２次曲線は射影幾何で扱えるとのことですが，他の曲線は扱えますか.

答． 扱えます．いわゆる代数曲線 (2 次曲線，3 次曲線，4 次曲線,...) を扱う「射影代数幾何」，可微分曲線を扱う「射影微分幾何」という分野に現在受け継がれて研究されています.

問． 双対ベクトル空間とは何ですか？量子力学に双対はありますか？

答． $\mathbf{R}^n$ の双対ベクトル空間 $(\mathbf{R}^n)^*$ は $\mathbf{R}^n$ 上の１次形式の全体の空間です．$(\mathbf{R}^n)^*$ の 0 でないベクトルに対して，その核として，$\mathbf{R}^n$ の $(n-1)$ 次元ベクトル空間 (超平面) が対応します．これが，今説明している双対の正体です．ところで，量子力学に双対があるか，双対量子力学があるかという問は奇抜で好きですが，わかりません.

問． 代数や解析での「双対」とは，具体的にどんな置き換えが起こるのですか？

答． 双対ベクトル空間を考えるということなので，幾何と同じです.

問． 正多面体では，双対は存在すると思うのですが，その中で，正６面体と正８面体，正１２面体と正２０面体，はそれぞれちがう正多面体と双対ですが，正４面体だけは同じ正４面体に双対します．違いはありますか？調べると，正多面体の各面の重心を結んでできる正多面体は双対だと書いてありました.

答． なるほど．違いというか，そのような現象はしばしば生じます.「自己双対」であると言います.

問． 「ペンローズのタイル張り」での高次元空間とは３次元空間でもよいのですか？

答． 手許に詳しい資料がないのですが,「ペンローズのタイル張り」は,「５次元空間」の格子点を，斜めに，２次元空間に射影して得られたと記憶しています．平面幾何といえども高次元の影が隠れているわけですね.

問． 球面上の２点の最短距離はどうやって求められますか？

答． その２点と原点を通る平面で球面を切り取ってできる大円に沿っての２点の距離です.

問． 三角関数が三角形をもとに定義されたとありますが，三角関数は原点中心，半径１の円で定義されているのではありませんか？三角形をもとにして定義すると，どうやって関数の変数を定義するのですか？

答． もちろん単位円を使って定義するのですが，もともと，三角関数 $\sin, \cos, \tan$ は，直角三角形の斜辺分の高さ，斜辺分の底辺，底辺分の高さ，で定義されました．変数は，底辺と斜辺のなす角度です．

問． 直角三角形の合同定理の存在価値は何でしょうか？

答． 直角三角形は，他の三角形より扱う頻度が高いということです．

問． 今まで習った写像の他にもまだ写像はあるのですか？

答． もちろんあります．たくさんあります．いくらでもあります．では，質問です．自然数全体の集合 $\mathbf{N}$ から自然数全体の集合 $\mathbf{N}$ への写像はいくつありますか？

問． $x^2+y^2=4$ と $x^2-4x+y^2-4y=16$ という２円の交点を通る円は，$(x^2+y^2-4)+k(x^2-4x+y^2-4y-16)=0$ という式で表すと高校時代に習いましたが，この式の k は何ですか？

答． パラメーターです．２円も交点が２点あると，それを通る円はたくさんあるので，それをすべて表すには，必ずパラメーターが必要になります．

問． ハミルトン力学やハミルトンの４元数とはどんなものですか？それにしても昔の人は数学者なのに物理学者でもあったりとすごい人ばかりですね．

答． ハミルトン力学については,「解析力学」という題名の本には必ず書いてあります．ハミルトンの４元数とは，$a+bi+cj+dk$ (a,b,c,d は実数) という形の数で，i,j,k は，$i^2=-1, j^2=-1, k^2=-1, ij=-ji=k, jk=-kj=i, ki=-ik=j$ という計算規則に従います．ところで，別に Hamilton 先生は数学とか物理とかの区別を意識はしていなかったと思います．良い仕事をしたので，結果的に後世のいろいろな分野に影響を与えたのだと思います．現代では,「専門でないから知りませんもん」という人が多いので注意しましょう．

問． 平面幾何を工学などに応用するとしたらどのように使えるのでしょうか？

答． CG がまず応用例として思い浮かびます．工系の数学シリーズの「形状 CAD と図形の数学」という本を参考にしてください．

問． 「知恵の輪」は数学者が考えるのですか？

答． 知りません．でも，知恵の輪は，幾何で言うところの「アイソメトリー」(isometry) という考え方と関係しますね．

問． オイラーとは何者なんでしょう？

答． オイラー (Euler) は，ガウス (Gauss) と並んで，史上最大の数学者と呼ばれている人です．スイス出身です．オイラーの定数，オイラー標数，オイラー無限積... などで有名です．オイラー全集は何十巻も出版されていますが，未だに未完とのこと．昔，スイスに行って，オイラーの肖像が紙幣にのっているので，さすがだなと思いました．そして，日本では，福沢諭吉，夏目漱石... いまだ「理数系は社会的に認められていない」と痛感しました．

問． 回答書に，ブール代数とか，フォン・ノイマンといった名前を見ると，色々な人が幾何をやっているもんだと思います．件 (くだん) の人々は今日のコンピューターデクノロジーの基礎部分でかなり大きな仕事をしたそうですが，やはり幾何は現代科学にかかせないものなのかも...実は．

答． どの分野にせよ，良い仕事をしている人には，幾何のセンスのある人が多いようです．不思議ですね．

問. 高次元空間というものは，図で表せない，頭の中で考えていく世界ですか？

答. もちろんそうです．図に書いたとしても，頭の中で考えます．どちらかというと，頭の中以外で考えるのは難しいですね．

問. 物質というものは本当は高次元で，現実世界では，それは３次元に射影したものだというのはどうですか？

答. どちらかというと，そのような考え方が現代物理学では常識になっていると思います．キーワードは「物質波」です．

問. この世界は３次元空間ですか？それとも４次元空間ですか？

答. ずばり無限次元空間です．無限次元の情報から，有限個の情報を取り出しているのだと思います．

問. 数学では，化学における「フロギストン説」の場合のように今まで構築してきた理論が雪崩式に崩れてしまう，ということはありえませんか？少なくとも歴史上にそういうことは，数学にはなかったのですか？

答. ありません．論理的な学問なので，たぶん将来も破綻しないでしょう．つまらない理論は，正しいままで，省みられなくなるだけのことです.「老兵は死なず，ただ消え去るのみ」ということです．ところで,「フロギストン説」とは何ですか？

問. 映画を作るとき，ビルなどを倒す場合，小さなモデルを使います．たとえば，$\dfrac{1}{25}$ の大きさのモデルを使った後，正常の速度で放映すると不自然になります．何分の一の速度なら自然になりますか？

答. やはり，$\dfrac{1}{5}$ だと思います．実験してみると良いですね.

問. 平面幾何の世界において，最も重要な式はなんでしょう？

答. 幾何ではやはり「重要な図形」でしょうね．幾何で最も重要な図形は何か？難しいですが，たぶん，この講義で最初に扱った「三角形」でしょう.

問. フラクタルとは一体どんなものでしょうか？

答. 森に行ってください．木を見てください．枝のつき方，葉のつき方を見てください．大きなサイズでのパターンが，小さなサイズにも同じように現れるということが観察されると思います．それが「自己相似性」です．フラクタルとは，おもに「自己相似性」のことを指しています.

問. トポロジーは数学的に確実に発見されたものですか？

答. はいそうです．日本数学会というものがあり，私もその会員ですが，日本数学会は１０ぐらいの「分科会」に分れているのですが，その一つに「トポロジー分科会」というものがあります．毎年の夏には，トポロジーシンポジウムというものが開催され，私はだいたい参加しています.

問. トポロジーとは，どんな所で使うものなのでしょうか？最近なぜか本の題名に「トポロジー」という言葉が入っているものをよく見ます．例えば「野菜の形をトポロジーで考える」などというものもありましたが，何を言っているのか意味不明でした.

答. そうですね．意味もわからず，流行りの言葉をふりまわす人が多くてこまります．とくに文系の先生に多い．北大の先生にはそんな人はいませんが... でも，野菜のトポロジーというのはおもしろそうですね.

問. トポロジーについての参考書があれば紹介してください.

答. いろいろありますが，たとえば，松本幸夫著「トポロジー入門」岩波書店，は，標準的な

内容がていねいに，わかりやすく書かれた本であるという定評があります．

問． もし人類に視覚が最初から無かったとしたら，幾何学は生まれたでしょうか？(そもそも視覚がなかったら，人類は文明を築くことができたでしょうか．確か，故手塚治虫氏の名作「火の鳥」に出てくる「ムーピー」なる生物と人との混血は，目が見えなくても文明を築きあげていましたが).

答． 難しい質問ですね．視覚がなくても，空間は認識できるはずだから，空間幾何学は生まれ，そのアナロジーとして，高次元でも無限次元でも理解しようとして,「幾何学」が生まれ，発展すると思いますね．

問． 古典幾何学を理解していないと，現代幾何学をきちんと理解することはむずかしいですか?

答． むずかしくないです．ただし，この講義で説明している部分は，古典幾何と近代幾何と現代幾何の平面幾何にかかわるおもしろそうな部分だけです．たくさんあるうちの一部の内容であることをご承知おきください．

問． 昔の回答に先生はたくさんの定理を見つけたとありますが，どうやって見つけたのですか？特別な才能が必要なのですか？それともやるきと根性があれば見つかるものなのですか？

答． がんばって見つけました．特別な才能が必要です．やる気と根性ももちろん必要です.「めげない性格」も必要です．すべて必要です... このように「うぬぼれ」も必要ということですね．うぬぼれと言えば，この前,「ジャン・レノ」に似ていると言われました．ジョン・レノンではなくてジャン・レノです．最近の僕 の自慢です．

問． 数学は，この先発展するのでしょうか？

答． 発展すると思います．人類が滅びたら，どこか違う星でやはり数学が発展するでしょう．

問． 「フィールズ賞」とは何ですか？アカデミー賞やグラミー賞，芥川賞，沢村賞と同じ様なものですか？いままで受賞した著名な人はいますか？

答． えーと，ノーベル賞を忘れていますね．フィールズ賞は数学のノーベル賞と呼ばれています．たとえば，広中平佑先生 (現山口大学長) が受賞しました．

問． 図形的 (幾何的) な証明が，いまひとつつかめません．どうしたらこういったものになじめますか？高校の頃にそういった幾何学を学んでいないせいかも知れませんが，何か幾何学的な証明というものがどうにもなじめません．

答． 慣れていないので，なじめないのは当然です．気にしないでください．少しだけ幾何が好きになった，何かおもしろそうなことをやっているな，と少しでも思ってもらえれば，この講義の目的は果たしたと考えます．いかがでしょうか？

問． 時間が余ったらやろうと思っているという「未来の平面幾何」というのも気になります．未来のことなどわからないのでは？

答． 天気予報というのもあります．星占いもあります．将来の希望があります．もちろん，未来が実際どうなるかは誰にもわかりませんが，どうなるか予測すること，どうなってほしいかを考えることは必要であり，楽しいことですね．ところで，道東へ行ってどうやったなら平行線が交わるように見えるのか全く見当もつきません．ちなみに，道東のどこら辺にいけばわかるのですか？という質問をもらいました．サーモンパークあたりはどうでしょうか．また,「はに丸」中で覚えていることですが，ひんべいが黙っているはに丸に「うんとかすんとか言ってくださいよ」と言ったところ，はに丸が「すん！」と答える場面です，という情報をもらいました．ところで，以前から気になっていたのですが，その「すん」とはどういう意味なのでしょうね.「おじゃる丸」のエボシの構造が知りたくてたまりません．また,「伝書ボタル」の名前が，略すと

「電ボ」になり漢字が変わるのはなぜですか?「田村カズマ」なのに，T シャツの文字がイニシャルでもない「V」なのはなぜですか？という質問をもらいました．私はわかりません．誰か教えてください．それから，ナスカの地上絵が作られた時代には，もう平面幾何が応用されていたのですか？という質問がありました．たぶんそうでしょう．また，そろばん２級までとりましたが，何ら使う機会なく，その腕は落ちました，という情報をもらいました．実は，考える力を養うのに密かに役に立っているのだと思います．また,「レインマン」を見ましたか，天才的な計算能力を持ったお兄さんが登場しますね，という質問を受けました．見ました．レインマンも良かったですが,「フォレスト・ガンプ」も良かったですね．ところで,「ファック」という言葉についてですが，そのときそのときの言った本人の心情などを考えれば，僕にとってはとても広い意味がある言葉だと思います，という意見が寄せられました．単なる口癖なのだと思いますが，現代日本語の「ちょーなになに」とか，語尾上がり言葉などのようなもので，耳障りだ，と言いたかっただけです．それはそうと,「Shade」とか「六角大王」とは，3D-CG を描くソフトです.「六角大王」は Mac 用でフリー版もあります，という情報をもらいました．また,「六角大王」はポリゴンを使ったモデリングソフトで，左右対称の画像を作れます.「Shade」は，personal や Pro 版があり，その人のレベルに合った機能があります．3D 画像には,「光源」や「視点」といった概念があり，幾何学を使うことで表現しているのたと思います，という情報ももらいました．皆さん詳しいですね．ありがとう.「Shade」については， CG アニメーションで使われ，TV の CM でも登場していることを知りました．幾何学は実社会で生かされているのですね．ところで,「六角大王」という名前の由来は，私が考えるに，立方体を斜めから見た輪郭が六角形だからか，立方体を平面で切った切り口が六角形だからだと思いますが，いかがでしょう．関係ないですが，以前，中国の長春 (旧満州の首府) の知り合いを訪ねたとき，ごちそう攻めに合い，今日は軽いものにしようと入った「加州牛麺大王」(カルフォルニア・ビーフ・ヌードル・キング) という店で出された大盛の牛肉ラーメンを思い出しました．おいしかったですが，食べ過ぎで帰国してから１週間お腹をこわしました．ところで，私は，京都は詩仙堂，奈良では興福寺の阿修羅像の前が最高の場です．京都へいかれたなら，鴨川をずーっと北へ北へひたすら歩くのもいいものですよ，あと大文字山を登るのもお勧めします．絶景です．という情報が寄せられました．今度，機会があれば試してみます．それから，トポロジーまでは痛みに耐えてよくがんばろうと思います，という決意の言葉をもらいました．頼もしいです．修業時代はみんな耐えているんですね．眠気に耐えてがんばってください．ではまた.

第１０回問答

問． 今回入った折れ線の位相幾何 (トポロジー) の考え方には，長さは必要ないのですか？資料を見ると，角の大きさは問題にされているのに，長さについて書かれていません．

答． こんにちは．さて回答ですが,「長さは使うが気にしない」というのが適切だと思います．講義資料には書いていませんが，１つ１つの折れ線を決めるためには，長さ (距離) は必要です．出発点と，進む方向と，どれだけ進んだあとで，どれだけ曲がるか，を指定しないと，折れ線は決まりませんね．でも，トポロジーの考え方として，**許容変形** (**正則ホモトピー**) **で不変は性質** (**または不変な量**) **に注目する**ので，長さは気にしません．許容変形を使えば，それだけ進んで曲がるか，ということは，自由に変えられるからです．早めに曲がったり，おそめに曲がったり，できるからです．同じように,「角度も使うが気にしない」個々の曲がり角の角度は気にしないで，角度のトータルだけを気にしています．

問． 閉じた折れ線は，可微分曲線ではありませんよね．ホイットニーの定理は，可微分曲線に関するものと書いてありますが，折れ線にしたら微分できなくなりませんか？

答． たしかに，折れ線は，可微分曲線ではありません．可微分曲線とは，媒介変数 t に関して微分可能な関数 $x(t), y(t)$ を使って $(x(t), y(t))$ と表される曲線のことです．たとえば，円は，$x(t) = a\sin t, y(t) = a\cos t$ で表される可微分曲線です．通常は，さらに仮定 $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ を付けます．折れ線は，この仮定をみたす可微分曲線ではありません．ですから，この講義で紹介する定理は，厳密に言えばホイットニーの結果そのものではなく，折れ線の場合に (ホイットニーの精神を正しく引き継いで) 翻訳したものです．

問． ガウス指数は，折れ線でしか成り立たないように思えるのですが．

答． そうです．資料にある定義は，閉じた折れ線に関するガウス指数の定義です．閉じた可微分曲線 $(x(t), y(t)), a \leq t \leq b, (x(a), y(a)) = (x(b), y(b)), (x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ に対しては，ガウス指数は，速度ベクトルの方向 $\theta(t)$ の回転数として定義されます．つまり，$(\cos\theta(t) m \sin\theta(t)) = \dfrac{(x'(t), y'(t))}{|(x'(t), y'(t))|}$ とおいたとき，ガウス指数は，$\dfrac{1}{2\pi}\int_a^b \theta'(t)dt$ で定義されます．

問． 曲線に時計回りも反対もないようにみえます．

答． そうですね．ここでは曲線に「向き」が与えられているとしています．向きがあれば，その進行方向が時計まわりか反時計まわりということが定まりますね．たとえば，陸上競技は，反時計まわりです．競馬は時計まわりです．逆走すれば，反対になります．

問． ガウス指数の範囲はどのくらいですか？

答． すべての整数 $0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots,$ を取り得ます．

問． 正則ホモトピーとは何ですか？

答． 特異点 (角，かど) のない閉じた可微分曲線の正則ホモトピーとは，特異点をもたない曲線の族を経由して，もとの曲線を変形していくこと (またはその曲線族) のことです．

問． 「曲面にも正則ホモトピーの概念がある」とはどういうことですか？

答． 上の回答を，曲面に対しあてはめたものです．厳密な定義は，長くなるので省略します．

問． 角 (かど) の定義は何ですか？

答． 「特異点」とも呼びます．パラメーター付けられた曲面 $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ のヤコビ行列 (3×2 行列になります) の階数が 1 または 0 のとき，その曲面は角 (かど) をもつ，あるいは特異点をもつといいます．古典的な曲面論は，通常，特異点のない曲面に対してのみ成り立ちます．

問． ホモトピーというものがよくわかりません．図形の変形の様子を数学的に記述するのに必要なことですか？

答． 必要なことです．位相幾何 (トポロジー) という分野がありますが，ホモトピーという概念はトポロジーでは基本的な概念です．その場合，通常は，ホモトピーについては，連続性のみを要請するのですが，正則ホモトピーでは，特異点が途中に現れないということを要請しているので,「正則」という形容詞がつくわけです．

問． スメールの定理がわかりません.「球面は正則ホモトピーを経由して裏返すことができる」の,「裏返す」というのは，単純に服を裏返すといった感じの意味なのでしょうか？つまり，球面の裏側の面を表にひっくり返すということですか？

答． その通りです．

問．「スメールの定理」の証明はどのようになるのですか？普通に考えて，ボールなどの球をそのまま裏返すことはできないですよね．証明でも，球面のどこかに切れ目が入っていることになっているのですか？

答． 切れ目は入れません．切れ目を入れてよいのなら，簡単に裏返せますね．切れ目を入れると連続的な変形とは言えません.「切れ目をいれなくても裏返すことができる」というところが驚くべきことなわけです．ただし,「正則ホモトピー」では，自己交差は許しています．自分自身と交差してもよい．でも，これからお話する，曲線の話で感じがつかめると思うのですが自己交差をゆるした滑らかな曲線のままで，球面を裏返すことができるなんで，とても想像できません．多くの人がそうだったなので，実は球面を裏返すことができるよ，ということを史上はじめて数学的に証明したスメールは偉い人なわけです．彼は球面を裏返すような正則ホモトピーの存在を数学的に証明しました.「代数トポロジー」の手法が使われました．ちなみに，スメール先生もフィールズ賞を受賞しています．でも，裏返すことができるということはわかった後でも，具体的な裏返しかたは，すぐにはわかりませんでした．その後，多くの数学者が具体的な裏返し方の構成を見つけようと努力し，とくにフランスの盲目の数学者のモラン先生が非常に簡単な裏返し方を構成しました．どう裏返すかという過程がビデオになって市販されています．(これは以前の回答書で，すでに紹介している通りです).

問． 射影平面で関数式を用いることができる理由がわかりません．

答． 良い質問ですね．射影平面の射影直線は，３次元空間 $\mathbf{R}^3$ の原点を通る平面でした．その平面の方程式は，$ax+by+cz=0$ という形の式で表されますね．そこで，これをそのまま射影直線の方程式とみなすわけです．普通の平面が $z=1$ にあるとすると，$z=1$ を $ax+by+cz=0$ に代入することによって，普通の平面内の普通の直線の方程式 $ax+by-c=0$ が得られます．そして，普通の平面の２次曲線 $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$ は，射影平面で考えるときは，方程式 $ax^2+by^2+cxy+dxz+eyz+fz^2=0$ という２次同次式で表されます．

問． 射影平面上では，放物線，双曲線，楕円の区別はないということですが，違いは，無限遠直線の選び方 (無限遠直線と交わらない，接する，交わる) のみであるからですね？

答． まったくその通りです．わかってもらって先生 はとてもうれしいです．

問． 二次曲線のうち，閉曲線 (無限遠点がない曲線) なのは，円，楕円だけですか．また，三次曲線の閉曲線はありますか？

答． その通りです．３次曲線で閉曲線であるものは存在しません．このことは,「３次方程式には必ず実解 (実根) がある」ということからわかります．

問． 双曲線が無限遠点で交わるのがイメージできません．

答．「双曲線が無限遠点で交わる」ではなく,「双曲線が無限遠直線と交わる」です.

問．「射影平面では双曲線は交わる」とありますが，それは漸近線を通りこして離れていくのですか？

答．そうです．この状況を上手に記述するために，無限遠直線を (射影変換を使って) アファイン平面上の直線に移動すると，もとの双曲線は，その直線と２点で交わる楕円になります．そして，もとの双曲線の２本の漸近線は，その２点での楕円の接線に移ります.

問．「放物線が無限遠で交わる」というのが納得できません.

答．次のような説明ではどうでしょうか？放物線 $y = x^2$ を考えましょう．xy 平面の原点の上に立って，y 軸の正の方向を見ると想像してください．そのとき，(y 軸中心の) 任意に狭い視野 (角度) に限っても，放物線上の十分遠くの部分は，その狭い視野に入ってきますね．(この部分は，皆さんも数式を使って確認してください)．このことから，放物線の無限遠直線との交点は，１点であることがわかります.

問．$y = \tan x$ についても無限遠点は存在しているのでしょうか？

答．グラフが無限に伸びているので，そうですね．無限遠直線上の１点から，無限本の枝が伸びている状態です．無限遠直線附近の状況を詳しくしらべるには，３次元空間で，曲面 $y = z\tan\dfrac{x}{z}$ を考えるとよいです.

問．「複素平面で考える」とは，単に虚軸を用いることですか？

答．そうです．たとえば「曲線」$x^2+y^2=-1$ について，x, y を両方とも複素数とします．すると，たとえば，$x = i, y = 0$ は方程式を満たしているので，複素平面上で考えた曲線 $x^2+y^2=-1$ 上にあると考えるわけです.

問．直線が曲線に含まれるというのは，納得いきません．曲線という日本語が気に入りません．楕円は曲線に含まれるのでしょうか？こうなると，曲線は平面上の図形をすべて表すことになると思うのですが.

答．言葉使いの問題なので，他の人とコミュニケートできれば何でもよいのですが，通常，特殊な曲線として直線をとらえることが多いということです．曲線は，英語では curve (カーブ) です.「カーブ」と訳すと,「曲がり角」という意味になりますね．line (ライン) という言葉も使われますが，これは，直線 (streight line) という意味と，曲線 (curved line) という意味の両方に使います．文脈で理解しなければいけません．ところで，楕円はもちろん曲線に含まれます．ただし，あくまで１次元的な図形を曲線とよぶので,「面」たとえば，円盤などの，平面領域自体は曲線とは言いません．境界は曲線ですが.

問．トポロジーとは何ですか？位相幾何とは，角度を中心として見た幾何学なのですか？

答．違います.「図形のつながり具合」に着目した幾何学というのが適切だと思います.

問．トポロジーと一筆書きはどのように関係しているのですか？

答．一筆書きができるかどうかは，角度とか長さに関係しない「トポロジカルな性質」です.

問．平面のオイラー数はどのようにして導かれるのですか？

答．平面のオイラー数は１です．オイラー数はトポロジーで基本的な不変量です．発見されたものだと思います.

問．昔，予備校に通っていたとき，予備校の先生が，大学でトポロジーをやっていたというのを少し聞きましたが，トポロジーは，比較的新しく，まだわからないところが多いのでしょうか？

答．そうですね．比較的あたらしく，まだわからないことが多いです．でもどんな分野でもわからないところは多いと思います．どちらかというと，人類がわかっていることなどほんのわず

かですね．

問． トポロジーは，平面以外 (３次元から n 次元) でも成り立ちますか？

答． もちろんあります．３次元トポロジー，４次元トポロジーは現在活発に研究されています．「ポアンカレ予想」は未解決問題です．(以前にも回答書ですでに書いています)．

問． サッカーボールのように，違う正多角形を用いて球を作るには，正５角形と正６角形のペア以外にあるのでしょうか？

答． おもしろい問題ですね．私は知りません．ぜひ，考えてみてください．

問． 特異点とは何ですか？「スタートレック」を見ていたらでてきました．どうやら，ブラックホールのような言いかたでした．

答． 「特異な点」です．他の場所に比べて特異な点を指します．いろいろな分野で，特異点は現れます．宇宙物理学なら，ブラックホールや，ビッグバンは特異点です．数学の分野でも，曲線論，曲面論，関数論，多様体論，のいたるところに，特異点が顔を出します．また,「視覚の理論」でも特異点は重要です．皆さんが，物を見るとき，その「輪郭」(りんかく) を意識しますが，その輪郭は特異点です．人の顔の目や鼻や口や耳は特異点です．特異点がないと，どちらが前がわからないし，誰の顔か分からなくなります．ちなみに，私の専門は「特異点論」です．

問． 円錐のとき，頂点の次元が変わるような気がするのですが，これは勘違いなのでしょうか？

答． よいところに気がつきました．でも，すこしだけ勘違いです．頂点は，そのまわりの面があってはじめて，頂点であるとわかるわけで，そのまわりの状態も記述しようと思うと，曲面なので，２つのパラメーターが必要ですね．ですから，頂点でも２次元です．

問． 「多様体」とはいったいどのようなものですか？

答． 球面やトーラスなど，各点の近くでは，ユークリッド空間のようになっている図形のことです．

問． ゆがんだ空間を扱う幾何というものはありますか？

答． あります．リーマン幾何です．アインシュタインは，リーマン幾何を使って，重力理論を幾何学化して，一般相対性理論を作りました．２０世紀前半のことです．現在でも統一場理論 (とくに重力と強い核力の統一) はまだ完成していませんが，今後とも幾何学が重要な役割を果たすことは確かでしょう．

問． フェルマーとは何者ですか？「フェルマーの最終定理」以外に何かすごいことをしたのでしょうか？

答． 何者シリーズですね.「フェルマーの最小原理」もすごいです．それ以降の物理 (力学，電磁気学，統計力学，物理数学，変分法など)，現代物理にも，たとえば「ファインマン積分」の思想にさえも影響を与えています．

問． 高次元世界では，ベクトル積はどのように定義されるのですか？

答． ベクトル積は，３次元空間のベクトルについてのみ定義されます．

問． 「物質波」とは何ですか？

答． 量子力学に出てくるド・ブロイの物質波です．

問． 前回の回答書に「この世界は無限次元空間で，無限次元の情報から，有限個の情報を取り出している」とありましたが,「無限次元の情報」とは，たとえば，どのような情報がありますか？よく,「４次元」と言われる「縦，横，高さ，時間」の他に何があるのですか？

答． 古典力学の言葉で言えば，たとえば，位置の３次元の他に，運動量 (あるいは速度) の分が３次元ありますね．皆さんが，２つの質点が独立に運動していることを記述しようとすると，全

部で，$(3+3)\times 2=12$ 次元必要です．その時間変化を記述する場合は，時間も入れて，13 次元空間で考えることになります．(相対論を考慮に入れれば，絶対時間はないから，$(3+3+1)\times 2=14$ 次元必要です)．質点ではなく，小さな球が回転する場合は，角運動量 (あるいは角速度) の 3 次元がそれぞれ必要になります．もし，その球は何色ですか？と聞かれたら，赤，青，黄色，などと答えますが，(色とは何か，ということにもよりますが)，コンピュータに色を教えるには，いくつかのパラメータが必要になります．(たとえば「明るさ」なども必要)．その球の材質は何かと聞かれたら，金属なのか，皮なのか，プラスチックなのか，その「ふうあい」を実現するには，いくつもの情報が必要になります．その球は誰のものか，その所有者の電話番号は？所有者は男か女か？とにかく情報はいくらでもあります.「次元が違う」という言葉がありますが,「違う次元が，無限にある」ということです．われわれは，その無限次元の情報のうちから，その時々に必要な情報を選んでいるわけです.

問．「この世界は無限次元空間です」とありました．*CG* における *3D* ムービーやグラフィックスに，私は違和感を感じることがあるのですが，やはり，現実の世界とは違うからなのでしょうか？

答．そう思います.

問．まだ納得できないことがあるのですが，なぜ平行線は無限遠点で交わるのですか？昔，平行線とは,「どこまでいっても絶対に交わらない同じ平面上の 2 本の直線」と習ったような気がします.

答．交点が普通の平面上には存在せず，無限遠直線上に存在する，というだけのことです．ところで，納得できないということは良いことです．だいたい，日本人はものわかりが良すぎます.器用すぎます．イギリス人などは，本当にものわかりが悪い．頑固です．でも頑固なので，本当に良いものを見極める目があります.「本当に自分で納得するまでとことん考える精神」は，われわれが見習うべきことですね.

問．数学の分野においても，海外での研修などは必要なのでしょうか？偉大な発見をした数学家の生家は，一度は見たほうがよいのでしょうか？

答．学問，とくに自然科学に国境はありません．海外がどうの，国内がどうの，といっていては，研究はできません．教えを請いたい人がいれば，参加したい研究会があれば，会いたい人がいれば，どこにでも行く必要があるのは当然でしょう．ところで，数学家の生家を見るのはただの観光でしょう.

問．平面幾何では計算はありますか？今，大学でやっている微分，積分や線形代数学は，計算だらけで，数学らしいのですが，平面幾何は，数学というより図学に似ている気がします．それに数字が少なく，記号や英文字が多い気がします．平面幾何が数学の一部ならば，計算とかないと，数学という感じがしません．それとも僕の考え方，感じ方が間違っているのでしょうか？

答．間違っているというより,「狭い」です．数学では，もちろん計算もします．また，論理的推論もします．大学の数学は，高校の数学に比べて，論理的推論の要素が増えているはずです.高校で数学が得意だったという人が，大学の数学に違和感を覚えるということが多いのはこのためです．微積分や線形代数学では，計算できるのは当然のこととして，その上で，論理的に考えられる能力が重要視されているはずです.「計算ができる」で満足してばダメで,「その計算をする目的は何か，ということを踏まえて計算ができる」という段階に進まなければいけません．目的もなく計算することは愚かなことです．ところで，数字 $1, 2, \ldots$ も立派な記号ですよ.

問．忘れてもよいのですか？

答．どんどん忘れてください．忘れることを恐れていては，新しいことば吸収できません．た

とえ話になって恐縮ですが，水を吸ったスポンジは，一度しぼらないと，新しく水は吸い込めません．黒板に新しい文字を書くには，一度黒板消しで古い文字を消しますね．身についたことは，忘れても思い出すことができます．思い出すことができなかったら，それは，皆さんにとって必要のないものです．

問． 数学ができるできないかは，生まれつきのものでしょうか？

答． どんな分野でも，とくに芸術的な分野では，生まれつきの才能というか,「向き不向き」があるのは確かです．これは仕方のないことです．でも，芸術でも，いろいろなレベルでの楽しみ方があって，絵画なら，自分で独創的な絵を描く画家，趣味で自分で絵を描く人，デザインなどの絵画を関係する職業につく人，美術評論家，たまに美術館に行くのを楽しみにしている人，などなど，いろいろな場合がありますね．数学は，実用的側面の他に芸術的側面のあるので，そういう意味で，自分にあった楽しみ方，数学との係わり方を発見してほしいな，と思っています．僕 も暇があったら美術館に行きたいと思っています．ところで,「アンリ・ルソー」という画家の絵が私は好きなのですが，知っていますか？ずっと，日曜画家だった人ですね．奇妙なエスニックな作品を多く残したひとです．ところで関係ないですが，エスニックといえば,「ゴーギャン」が有名ですが，この人をモデルにした小説「月と６ペンス」(サマセット・モーム) を大学１年のころ (高校時代かもしれません) に読んで衝撃を受けた記憶があります．読んことがありますか？

問． 現代の数学の理論を昔の人に見せたとしたら，どのような反応をすると思いますか？

答． 根本的に考え方が違う部分があるので，数学とは認めないかも知れませんね．学問が進歩するときには，仕方のないことでしょう．

問． 幾何はもう進歩しないのですか？幾何というか，数学全部はもうすでに研究し終わった感じがします．これ以上はもうほとんど進歩していかないんじゃないですか？

答． そんな情けないことを言わないでください．進歩するかどうかはこれからの皆さんの世代の活躍にかかっています．ところで，二流の人は，人のやってきたことを追い掛けるだけなので，すこし行き詰まると，もう何もやることはないと判断しがちなのです．それに比べて，一流の人は，行き詰まりの中に，新しいアイディアや新しい視点を持ち込み，その分野を再生し力強く進んでいくものです．皆さんも，それぞれの道で，行き詰まりを感じても，逃げずに，どんどんブレイク・スルー (break through) していってください．ところで，この平面幾何の講義をコンピュータを利用して利用したら良いのではないでしょうか？という提案をもらいました．なるほど．考えてみます．まあ，この回答書を書くにもコンピュータを利用してはいるのですが，もっと積極的に利用するということですね．そろそろホーム・ページを立ち上げたいと思っているので，それを利用するとよいかも知れませんね．でも，私はコンピュータを過信していないアナログ人間です．ところで，自分は微分が苦手であります，という告白がありました.「微分のことは自分でせよ」という言葉もあるので，この講義では，微分は使いません．また，CG グラフィックに影をつける時には，射影幾何的な計算がされているのでしょうか？という質問を受けました．たぶんそうでしょうね．それから，平面幾何の最先端はあるのですか？という質問がありました．平面なので，最先端はなく，無限に広がっていると言った方がよいと思います．それはともかく，なにが最先端かどうかは問題意識によると思います．それはそうと，射影平面に対して，従来の平面はなんというのですか？という質問もありました.「従来の平面」で意味が通じると思います．ところで，４次元は見えますか？という質問もありました．見えるのは２次元です．網膜の像は２次元 (平面図形) です．誰でもそうだと予想します．３次元に見えるのは，皆さんが頭の中で想像しているからですね．想像するなら，何次元でも可能です．要は想像力の問題ですね．また，ハミルトンという単位はありますか？という質問を受けました．私は知りません．誰か教え

てください．また,「パスカルの定理」は,「パスカルの三角形」と関係はありますか？「パスカルの三角形」と「パスカルの定理」のパスカルは同じ人ですか？という質問がありました．同じ人です．でも，数学の内容としては，この２つのことは関係ないようですね．ところで，ニュートンは第一論文を平面幾何のみで証明したそうです．ライプニッツとニュートンは微積分法をほぼ同時に発見し，発見者はどちらか，という争いをしていました．その論争の中，ニュートンの第一論文をあえて微積分を使わずに，平面幾何のみを用いて証明し，ライプニッツの鼻をあかしたのだそうです．という情報をもらいました．確かに，ニュートンの有名な本「プリンキピア」にもかなり平面幾何が使われていますね．また，オイラーの公式で，e を使ったすごい式があったと思ったのですが，思い出せません．という質問を受けました．それは，$e^{i\pi} = -1$ のことですか？また，色々な事でガウスという名前を聞きますが，全て一人のガウスによるものですか？それとも様々な時代の様々なガウスが考えた別のものですか？という質問がありました．一人のガウスです．また，ガウス記号では何ですか？という質問もありました．ガウス記号 $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す記号です．では，$[0.9999\cdots]$ は何でしょう？それはそうと，講義と関係ないですが，なぜ時計は右まわりなのでしょうか？という質問を受けました．難しい質問ですね．文字を横書きする場合に，左から右の方へ書く，ということから来ていると推測されますね．ところで,「CUBE」という映画もほんの少しだけ数学的な要素を含んだ映画で，なかなか面白かったです．数学抜きなら「ショーシャンクの空に」が No.1 間違いなしですが，というコメントをもらいました．数学的要素というなら,「マトリックス」だと思いますが．私は観たことはないです．それから,「すん」は「うん」と一セットだったはずです．確かウンスンカルタというカルタが語源だったと思います，という情報をもらいました．ありがとう．また，この世は本当に無限次元空間なのでしょうか？という質問をもらいました．冷静に考えれば，この世もあの世も無限次元です．関係ないですが，(仏教用語?に)「無間 (むげん) 地獄」というのがあった気がします．それから,「フロギストン説」とは,「物体が燃えると物体の中に含まれるフロギストンが飛び出し，物体はもえかすになる」というものだったと思います，と教えてもらいました．ありがとう．それはそうと，絶景といえば，神戸の 100 万ドルの夜景です．昔，イギリスのお偉いさんが来て,「きれい」と言い,「電気代はどれくらいか？」ときいたところ,「100 万ドル」と答えたそうです，という情報をもらいました．ありがとう．私も見たことあります．神戸もよいですが，夜景といえば，函館山から見た夜景もきれいですね．それから，釧路管内標茶 (しべちゃ) 町にある「開陽台」という丘のてっぺんからまわりを見わたすと，本当に地平線がカーブを描いて見えます．牛がこまつぶのように見えます．最高感動ですよ，という情報をもらいました．ありがとう．地平線がカーブを描くのは，地球が平面ではなくて，球面 (楕円面) である証拠ですね．今度ぜひ訪れてみます．ところで,「牛」という言葉で思い出したのですが，何年か前に，とあるスーパーで聞いた宣伝文句があります：「牛肉パック詰め特売，ギューとつまってウッシッシ．モーカウカウ」．思わず感動して，もう買う買う．ところで，電ボの歌うエンディングテーマ大好きです．先生はどうですか，という質問を受けました．ハワイアンでまったりしていて良いですね．それはともかく,「はに丸」とか「伝書ボタル」とか，自分の知らない内容で盛り上がっていると哀しいものがありますね，という指摘も受けました．ごめんね．最近暑いです．夏を涼しくのりきる方法についても教えてください，という要望がありました．夏は暑いものです．暑くない夏はつまりません．夏は「熱く」のりきりましょう．苦労の数だけ幸せになれる．この道の他に行く道なし．行けばわかるさ，やればできるさ．ではさようなら．

おまけ

問. この問答集を公開した目的や意図は何ですか？

答. 古代ギリシャの哲人たちは，学問の基本を対話すなわち問答におきました．わが東洋の哲人も多くの問答集を残しています．最も古い学問の一つである数学，とくに「幾何学」も，当然，問答を通して永い間研究されてきたわけです．しかし，一般的な数学に対する見方はどうも違っているようです．数学を「冷たい学問」「おもしろみのない計算の羅列」と思っている人がほとんどだと思います．あるいは，数学は「頭の良い人だけがわかるもの」「エリート選別のための道具」などととらえている人も多いのではないでしょうか？(それらの偏見を利用して，必要もないのに数学を使って，数学を衒学 (学をひけらかす．私が今していることかも) の道具にしている人も多く見かけます)．数学に詳しい人でさえも,「あくまで自然を記述するための便利な言葉」「論理で地道に演繹していくだけの学問」としか認識していない場合も多いようです．あるいは，皮肉っぽく「あたり前のことをねちねち調べるマニアの暇つぶし」と思っている人もいるかもしれません．もちろん，それらの認識は少しは当たっているわけですが，やはり一面的な見方であり，それだけが数学ではありません．数学が冷たく感じられるのは，論理にしたがって普遍性を追求しているからですが，それは，数学を，いわば”腐らせない”ために冷やしてあるのであって，冷たい数学に，一人一人が血を通わせることを厭わなければ，数学は非常におもしろい知的活動なのです．数学に対する偏見を可能な限り修正していきたいなあ，と私は常々思っています．

問. 数学は簡潔さを重んじる学問なので，くどくどと対話することは，せっかくの数学の簡明さを損なうのではないでしょうか？

答. 私はそうは思いません．ところで，大学の数学のテストで，数式だけを書いてすましている答案をよく見かけます．採点する人間との対話を拒否するように感じられます．正しいことは正しい，もちろんそれでよいのですが，その正しさは，永い歴史の血の通った人間の活動の賜物であることを思い出しましょう．完成品を眺めるだけでは，数学の本当のおもしろさは絶対に理解できません．正しいことは，常に対話を通じて主張し，相手の観点を理解して，さらに深めていかなくては，ひからびた学問になってしまいます．確かに，(私も含めて) わけのわからない大人は多いのですが，それにめげずに頑張って問答しましょう.「問答無用は野蛮でござる.」「絶望するなかれ，真理は必ずそこにある．少年少女よ大いに対話せよ.」