幾何学２（トポロジー入門）（２００３年度前期）

担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお，北海道大学理学研究科)

目次． ０．この講義の目的// １．基本的な図形 (空間) // ２．閉曲面の位相的分類，基本群 (結果の紹介) // ３．商空間の位相// ４．道の変形// ５．群の概念と図形の基本群// ６．写像のホモトピー// ７．空間の同相とホモトピー同値// ８．円周の基本群と写像度// ９．融合積とファンカンペンの定理// １０．被覆空間// １１．基本群の計算例// １２．基本群の応用例

参考文献
(授業で直接的には使う予定はないが，講義内容の参考，あるいは発展的な内容について参考にするとよい)：
◎松本幸夫著「トポロジー入門」岩波書店．(特に４，５，６章).
◎徳永，島田，石川，齋藤著「代数曲線と特異点」特異点の数理４，共立出版，(第１章 1.1〜1.3，第２章 2.1〜2.4，第３章 3.1〜3.4).

● ０．この講義の目的.

図形を調べる．代数的な不変量から図形を調べる．

空間 (図形，位相空間) $\longrightarrow$ **基本群**
同相 (位相同形)，あるいは，**ホモトピー同値** $\longrightarrow$ **基本群の同型**
空間の分割・合併 $\longrightarrow$ 基本群の分解・融合

● １．基本的な図形.

n 次元デカルト (Cartesian) 空間 (ユークリッド (Euclid) 空間)：$\mathbf{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, (1 \leqq i \leqq n)\}$.

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

n 次元**閉円板** (closed disk, 閉球体, closed ball)：
$D^n := \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leqq 1\}$.

n 次元**開円板** (open disk, 開球体, open ball)：
$\overset{\circ}{D}{}^n := \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| < 1\}$.

$(n-1)$ 次元**球面** (sphere)：$S^{n-1} := \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.
S^1: 円周，S^2: 球面，S^3: 3 次元球面.

単位区間 (unit interval, ゼロイチ区間) $I = [0,1] := \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leqq x \leqq 1\}$.
n 次元**立方体** (cube)：$I^n := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid 0 \leqq x_i \leqq 1, (1 \leqq i \leqq n)\}$.

演習問題１． $S^1, D^2, I^2, S^2, D^3, I^3$ をそれぞれ図示せよ.

演習問題２． $\overset{\circ}{D}{}^1$ と $\mathbf{R}^1$ が同相であることを示せ．$\overset{\circ}{D}{}^2$ と $\mathbf{R}^2$ が同相であることを示せ．$\overset{\circ}{D}{}^n$ と $\mathbf{R}^n$ が同相であることを示せ.

同相である $\Leftrightarrow$ **同相写像** (両連続な全単射) が存在する.

演習問題３． D^1 と $I^1 = I$ が同相であることを示せ．D^2 と I^2 が同相であることを示せ.

● ２．閉曲面の位相的分類，基本群 (結果の紹介).

2.1 閉曲面.

２次元コンパクト位相多様体のことを簡単に**閉曲面**とよぶ.

n 次元**位相多様体**：ハウスドルフ (Hausdorff) 空間であって，局所的に $\mathbf{R}^n$ と同相な位相空間.
つまり，位相空間 M が n 次元位相多様体 であるとは，Hausdorff 性$\forall p, q \in M, (p \neq q), \exists U, V$, U は p の開近傍, V は q の開近傍, $U \cap V = \emptyset$, 局所ユークリッド性$\forall p \in M\ \exists W$, W は p の開近傍, $\exists \Omega$, Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合, $\exists \varphi : W \to \Omega$, φ は同相写像.

2.2 閉曲面の位相的分類.

◇ "向き付け可能" な閉曲面.

$S^2, T^2, T^2\#T^2, T^2\#T^2\#T^2 = \#_3T^2, \dots, \#_gT^2, \dots$

$\#$ は**連結和**という操作である．(講義で説明する).
$S^2 = \#_0T^2$ とみなすと，考えやすい.

演習問題４． $T^2, T^2\#T^2, T^2\#T^2\#T^2 = \#_3T^2$ を図示せよ.

◇ "向き付け不可能" な閉曲面.

$\mathbf{R}P^2, \mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2, \mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2, \dots, \#_g\mathbf{R}P^2, \dots$

これらの分類は，閉曲面たちを「同相である」という同値関係で分類したもの.

2.3 よく知られた位相不変量.

種数 (ジーナス，genus) g：
曲面 $\#_gT^2$ や $\#_g\mathbf{R}P^2$ に対し，数 g をその種数とよぶ.
S^2 は種数 0．T^2 は種数 1．$\mathbf{R}P^2$ は種数 1.

オイラー標数 (Euler characteristic, Euler number)
$\chi(S^2)=2, \chi(\#_g T^2)=2-2g.$ $\chi(\#_g \mathbf{R}P^2)=2-g.$
(χ は「カイ」と読む).

注：S^2 は $\mathbf{R}P^2$ の２重被覆．T^2 は $\mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2$ の２重被覆．$\#_{g-1}T^2$ は $\#_g\mathbf{R}P^2$ の２重被覆．このとき，
$\chi(\#_{g-1}T^2)=2-2(g-1)=2(2-g)=2(\chi(\#_g\mathbf{R}P^2))$.

● ３．商空間の位相．

3.1 位相空間．

> 集合 X が位相空間 $\Longleftrightarrow$ X の部分集合の一つ一つが "X の開集合である"か "X の開集合でない"かが，いちいち明確に決められている．(決める手続きが与えられている).

ただし，次のことが最低限要求される (開集合の決めかたの条件，**開集合系の条件**)：
X の開集合たちの**有限個の共通部分**も X の開集合である．
X の開集合たちの**和集合** (無限個の和集合であってもよい) も X の開集合である．
X 自身と $\emptyset\subseteq X$ は X の開集合である．

> $\mathcal{O}_X := \{U \mid U\subseteq X$ は X の開集合 $\}$ ($\subseteq \mathcal{P}_X := \{S \mid S\subseteq X$ は X の部分集合 $\}$)

と書くことがある．$\mathcal{O}_X$ は，X の開集合たちの集合である．位相空間 X の**開集合系**あるいは**位相** (topology) あるいは**位相構造** (topological structure) とよばれる．

開集合系が初めに与えられた場合,「**閉集合** $\Leftrightarrow$ その補集合が開集合」と定義される．

注：場合によっては，開集合系の代わりに**閉集合系**を指定することがある．**閉集合系の条件**は次で与えられる：
X の閉集合たちの**有限個の和集合**も X の閉集合である．
X の閉集合たちの**共通部分** (無限個の共通部分であってもよい) も X の閉集合である．
X 自身と $\emptyset\subseteq X$ は X の閉集合である．

3.2 基本的な図形を位相空間とみなすこと．

※ $\mathbf{R}^n$ の開集合系．

> $U\subseteq\mathbf{R}^n$ が $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$
> 「$\forall a\in U, \exists\varepsilon>0, \forall x\in\mathbf{R}^n, (\|x-a\|<\varepsilon\Rightarrow x\in U)$」

演習問題５． この $\mathbf{R}^n$ の開集合の決め方が開集合系の条件を満たすことを確かめよ．

演習問題６． $\mathring{D}^n\subset\mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合であることを示せ．

演習問題７． $S^{n-1}\subset\mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合であることを示せ．

演習問題８． A 君は,「開集合でなければ閉集合だ」と言っている．彼は正しいか？

※ $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A の開集合系 (**相対位相**).

> $V\subseteq A$ が X の開集合 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$「$\mathbf{R}^n$ のある開集合 U があって，$V=U\cap A$ と表される.」

演習問題９． $\mathcal{O}_A:=\{U\cap A\mid U\in\mathcal{O}_{\mathbf{R}^n}\}$ が開集合系の条件を満たすことを示せ．

※ 位相空間 $(X,\mathcal{O}_X)$ の部分集合 A の開集合系 (**相対位相**).

> $\mathcal{O}_A:=\{V\subseteq A\mid \exists U\in\mathcal{O}_X, V=U\cap A\}$.

相対位相を入れた部分集合を**部分空間**とよぶ．

演習問題１０． 上の $\mathcal{O}_A$ が開集合系の条件を満たすことを示せ．

注：「開集合である」とか「閉集合である」という場合は，誤解のないように「D^3 の開集合である」とか「S^2 の開集合である」という具合に，何処で考えているかを必ず明示しよう．

3.3 商集合 (剰余集合，等化集合)：

X を集合，$\sim$ を X 上の同値関係とする．
このときの同値類の全体の集合を X の $\sim$ に関する**商集合** (あるいは**剰余集合，等化集合**など) と呼ぶ．
商集合を記号 $X/\!\sim$ などで表す．("割り算" からのアナロジーか).
従って，商集合 $X/\!\sim$ の要素１つ１つは，ある $x\in X$ の属する同値類であることに注目しよう．$x\in X$ の属する同値類を，たとえば，記号 $[x]$ で表す．$[x]\in X/\!\sim$ である．

全射 $\pi: X\to X/\sim$ が $\pi(x):=[x]$ で定まる (**商写像**)．逆に，X からある集合 Z への全射 $\varphi: X\to Z$ があれば，X 上の同値関係が定まり，その商集合と Z との間に全単射が φ から導かれる．

例：$\mathbf{R}/\mathbf{Z}$．これは，$\mathbf{R}$ 上の同値関係 $\sim$ を $x\sim x' \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} x-x'\in\mathbf{Z}$ で定義したときの同値類の集合 $\mathbf{R}/\!\sim$ のことである．$e:\mathbf{R}\to S^1\subset\mathbf{R}^2=\mathbf{C}$ を，$e(x):=exp(2\pi x)$ により定めると，写像 e は $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ と S^1 の間の全単射を導く．

3.4 商位相の定義：

X を集合，$\sim$ を X 上の同値関係とする．X に位相が入っているとき (つまり，X の開集合系 $\mathcal{O}_X$ が指定されているとき)，商集合 $X/\!\sim$ にも位相 (**商位相**) が導かれる：$\pi: X\to X/\!\sim$ を自然な全射とするとき，

> 「$U\subseteq X/\!\sim$ が $X/\!\sim$ の開集合」$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$「$\pi^{-1}(U)\subseteq X$ が X の開集合」

$\pi^{-1}(U)$ は，U の π による逆像：$\pi^{-1}(U):=\{x\in X\mid \pi(x)\in U\}$.
商位相を付与した商集合を**商空間** (**剰余空間**, **等化空間**) と呼ぶ．

X, Z を集合，$\varphi: X\to Z$ を全射とする．X に位相が入っているとき，X から φ によって導かれた Z 上の**商位相** が次で定まる：「$U\subseteq Z$ が Z の開集合」$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$「$\varphi^{-1}(U)\subseteq X$ が X の開集合」

演習問題１１． $(X,\mathcal{O}_X)$ を位相空間，$\varphi: X\to Z$ を全射とする．このとき，$\mathcal{O}_Z:=\{U\subseteq Z\mid\pi^{-1}(U)\in\mathcal{O}_X\}$ が開集合系の条件をみたすことを確かめよ．

演習問題１２． 写像 $\varphi : X \to Z$ は，(X の位相と，Z の商位相に関して) 連続であることを示せ．

演習問題１３． X, Y を位相空間，$f : X \to Y$ を連続写像とする．このとき，X がコンパクトならば，$f(X) \subseteq Y$ もコンパクトであることを示せ．

演習問題１４． $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. これは，$\mathbf{R}$ 上の同値関係 $\sim$ を $x \sim x' \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} x - x' \in \mathbf{Z}$ で定義したときの同値類の集合 $\mathbf{R}/\sim$ のことである．$\mathbf{R}$ の位相から $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ に商位相を入れたとき，$\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ がコンパクトであることを示せ．(ヒント：$I = [0,1]$ について $\pi(I) = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ である)．

演習問題１５． $e : \mathbf{R} \to S^1 \subset \mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ を，$e(x) := exp(2\pi x)$ により定めると，写像 e は 全単射である連続写像 $\overline{e} : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to S^1$ を定めることを示せ．

演習問題１６． X がハウスドルフな位相空間，$A \subseteq X$ が (相対位相に関して) コンパクト部分集合ならば，A は X の閉集合であることを示せ．

3.5 曲面の工作

X を位相空間，$A, B \subseteq X$ を部分空間，$\varphi : A \to B$ を同相写像とする．

> X **から** A **と** B **を貼り合わせて得られる空間** X/φ とは，X 上の同値関係 $\sim$ を「$p \sim q \Leftrightarrow p = q$，または，$p \in A$ であって $q = \varphi(p)$，または，$p \in B$ であって $q = \varphi^{-1}(p)$」と定めたときの商空間 $X/\sim$ のことである．

X, Y を位相空間，$A \subseteq X, B \subseteq Y$ をそれぞれの部分空間とし，$\varphi : A \to B$ を同相写像とする．

> X **と** Y **を** $\varphi : A \to B$ **で貼り合わせて得られる空間** $X \cup_\varphi Y$ とは，$X \cup Y$ (disjoint union) 上の同値関係 $\sim$ を「$p \sim q \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} p = q$，または，$p \in A$ であって $q = \varphi(p)$，または，$p \in B$ であって $q = \varphi^{-1}(p)$」と定めたときの商空間 $(X \cup Y)/\sim$ のことである．

演習問題１７． 正方形 $I^2 = I \times I, (I = [0,1])$ の２辺を貼り合わせて円筒 (シリンダー，$S^1 \times I$ と同相な図形) を作る操作を考察せよ．

演習問題１８． 正方形 $I^2 = I \times I, (I = [0,1])$ の２辺を貼り合わせてメビウス (Mö bius) の帯を作る操作を考察せよ．

演習問題１９． 円筒 $S^1 \times I$ からトーラス T^2 ($S^1 \times S^1$ と同相な図形) を作る操作を考察せよ．

演習問題２０． 実射影平面 $\mathbf{R}P^2 := (\mathbf{R}^3 \setminus \{0\})/\sim$ がコンパクト，ハウスドルフ空間であることを示せ．ただし，$x, x' \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ に対して，$x \sim x' \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$(ある $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ があって，$x = cx'$)．

演習問題２１． $\mathbf{R}P^2$ と $S^2/\sim$ が同相であることを示せ．ただし，$x, x' \in S^2$ について $x \sim x' \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} x = x'$ または $x = -x'$．

演習問題２２． メビウスの帯の境界部分 (S^1 と同相) と閉円板 (D^2 と同相な図形) の境界部分 (S^1 と同相) を貼り合わせて射影平面 $\mathbf{R}P^2$ と同相な図形を作る操作を考察せよ．

● ４．道の変形

4.1 道の変形 X を位相空間とする．閉区間 $I = [0,1]$ から X への連続写像 $\ell : I \to X$ のことを X 上の**道** (path, あるいは弧, arc) と呼ぶ．$\ell(0) = p, \ell(1) = q$ のとき ℓ は p と q を結ぶ道と言い，p は ℓ の**始点**，q は ℓ の**終点**，であると言う．

例：$X = \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$. $\ell : I \to X$, $\ell(t) := (\cos(\pi t), \sin(\pi t))$, は $p = (1,0)$ と $q = (-1,0)$ を結ぶ道．

「$\ell : I \to X$ が連続写像」$\Leftrightarrow$「$\forall U : X$ の開集合に対し，$\ell^{-1}(U)$ が I の開集合」$\Leftrightarrow$「$\forall t_0 \in I, \forall U$, $\ell(t_0)$ の開近傍に対し，$\exists \varepsilon > 0$ があって，$t \in I, |t - t_0| < \varepsilon \Rightarrow \ell(t) \in U$．」

$I = [0,1]$ の代わりに $[a,b]$ としても以下の理論は同じだが，$[0,1]$ で統一する．(道のパラメータの基準化)．

> 位相空間 X が**弧状連結**であるとは，任意の $p, q \in X$ に対し，p と q を結ぶ道が存在するときにいう．

演習問題２３． $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ は弧状連結であることを示せ．

演習問題２４． $\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}^2$ は同相でないことを示せ．

> $\ell : I \to X, \ell' : I \to X$ を始点と終点が同じ道とする．$\ell(0) = p = \ell'(0), \ell(1) = q = \ell'(1)$．このとき，連続写像 $H : I \times I \to X$ が ℓ **から** ℓ' **へのホモトピー** (homotopy) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} H(t,s)$ $0 \leqq t \leqq 1, 0 \leqq s \leqq 1$ について，
> $H(t,0) = \ell(t), (0 \leqq t \leqq 1)$, $H(t,1) = \ell'(t), (0 \leqq t \leqq 1)$,
> $H(0,s) = p, 0 \leqq s \leqq 1$, $H(1,s) = q, 0 \leqq s \leqq 1$．

注：t は道のパラメータ，s は変形のパラメータ．

注：ホモトピーは**道の始点と終点を止めた** (X **の中での**) **連続変形**を与える．

例：$X = \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$. $\ell, \ell' : I \to X$, $\ell(t) := (\cos(\pi t), \sin(\pi t))$, $\ell'(t) := (\cos(\pi t), \frac{1}{2}\sin(\pi t))$. $H : I \times I \to X$, $H(t,s) := \cos(\pi t), (1 - \frac{t}{2})\sin(\pi t))$ とおくと，H は ℓ から ℓ' へのホモトピーである．

> ℓ から ℓ' へのホモトピーが存在するとき，ℓ と ℓ' は (始点と終点を止めて) **ホモトープ** (homotope) あるいは**ホモトピック** (homotopic) であると言い，$\ell \simeq \ell'$ と書く．

ホモトープという関係は同値関係である：

$\ell \simeq \ell$

$\ell \simeq \ell' \Rightarrow \ell' \simeq \ell$

$(\ell \simeq \ell'$ かつ $\ell' \simeq \ell'') \Rightarrow \ell \simeq \ell''$.

演習問題２５． このことを証明せよ．

4.2 道の積

$\ell : I \to X$ を p と q を結ぶ道，$m : I \to X$ を q と r を結ぶ道とする．(ℓ の終点と m の始点が一致)．

> ℓ と m の積 $\ell \cdot m : I \to X$ が
> $(\ell \cdot m)(t) := \ell(2t), (0 \leqq t \leqq \frac{1}{2})$,
> $(\ell \cdot m)(t) := \ell(2t - 1), (\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1)$．で定まる．

道の積は，いわば「駅伝」である．

ホモトープな道の積はホモトープ：
$(\ell \simeq \ell'$ かつ $m \simeq m') \Rightarrow \ell \cdot m \simeq \ell' \cdot m'$.

道の積の結合法則　$(\ell \cdot m) \cdot n \simeq \ell \cdot (m \cdot n)$.

4.3 逆の道
X 上の道 $\ell : I \to X$ に対し，ℓ の**逆**を $\ell^{-1}(t) := \ell(1-t), (0 \leqq t \leqq 1)$ で定める．$\ell^{-1} : I \to X$.
ℓ の始点は ℓ^{-1} の終点，ℓ の終点は ℓ^{-1} の始点.

$\ell \cdot \ell^{-1} \simeq \tilde{p},\ \ell^{-1} \cdot \ell \simeq \tilde{q}$
$p = \ell(0)$. $\tilde{p} : I \to X$ は定値写像 $\tilde{p}(t) = p$.
$q = \ell(1)$. $\tilde{q} : I \to X$ は定値写像 $\tilde{q}(t) = q$.

演習問題２６． X, Y を位相空間，A, B を X の閉集合，$X = A \cup B$ とする．写像 $H : X \to Y$ があり，制限 $H|_A : A \to Y$ と $H|_B : B \to Y$ が共に連続ならば，H も連続であることを示せ.

演習問題２７． $\ell \cdot \ell^{-1} \simeq \tilde{p}$ を確かめよ.

4.4 閉じた道
道 $\ell : I \to X$ について終点が始点に一致する $(\ell(0) = \ell(1))$ とき，ℓ を閉じた道 (closed path, 閉道，ループ，loop) と呼ぶ．$p_0 = \ell(0) = \ell(1)$ を基点 (base point) と呼ぶ.
さて，$p_0 \in X$ に対して，
$\Omega(X, p_0) := \{\ell : I \to X \mid \ell$は閉じた道 $\ell(0) = \ell(1) = p_0\}$ とおく.
$\simeq$ (ホモトープという関係) は $\Omega(X, p_0)$ 上の同値関係. (4.1 参照).

$\ell, \ell', m, m', n \in \Omega(X, p_0)$ のとき，
$(\ell \simeq \ell'$ かつ $m \simeq m') \Rightarrow \ell \cdot m \simeq \ell' \cdot m'$.
$(\ell \cdot m) \cdot n \simeq \ell \cdot (m \cdot n)$.
$\ell \cdot \tilde{p_0} \simeq \ell, \tilde{p_0} \cdot \ell \simeq \ell$.
$\ell \cdot \ell^{-1} \simeq \tilde{p_0}, \ell^{-1} \cdot \ell \simeq \tilde{p_0}$.

そこで，$\pi_1(X, p_0) := \Omega(X, p_0)/\simeq$ とおき，p_0 を基点とする X の**基本群** (fundamental group) とよぶ.

演習問題２８． $\ell \cdot \tilde{p_0} \simeq \ell$ を確かめよ.

● ５．群の概念と図形の基本群

5.1 群
集合 G に２項演算 $\cdot, (g_1, g_2 \in G, g_1 \cdot g_2 \in G)$ が定まっていて，次の３条件をみたすとき，G を**群** (group) とよぶ：

(i) G の中に特別な要素 e が存在して，$\forall g \in G, g \cdot e = g, e \cdot g = g$ が成り立つ．(e を G の**単位元** (unit element) とよぶ).
(ii) G の各要素 g を決めるたびに，$g \cdot g' = e, g' \cdot g = e$ となる $g' \in G$ が存在する．(このような g' を g の**逆元**とよび，通常 g^{-1} と書く).
(iii) G の任意の３要素 g, h, k に対し，$(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$ が成り立つ．(結合法則).

例：$G = \mathbf{R} \setminus \{0\}$．通常の乗法．$e = 1$
例：$G = \mathbf{R}$．通常の加法．単位元 $e = 0$, 逆元 ”a^{-1}” $= -a$.
例：$G = \mathbf{Z}$．通常の加法.
例：$G = S^1 := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$．複素数の積．単位元 1.
例：$G = \mathrm{GL}(2, \mathbf{R}) := \{A \mid A$ は実２次正則行列 $\}$．行列の積．単位元 $I_2 (= E_2)$ 単位行列．逆元は逆行列.
例：$G = \{e\}$．**自明群**.
例：$G = S_n := (\{1, 2, \ldots, n\}$ の全単射全体の集合)．積は写像の合成．単位元は id 恒等写像．逆元は逆写像．n **次対称群** (**置換群**).
例：$G = \{\pm 1\}$ は乗法に関して群.

群 G が**可換群** (**アーベル群**，**加群**) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall g, h \in G, g \cdot h = h \cdot g$.
例：$\mathbf{R} \setminus \{0\}, \mathbf{R}, \mathbf{Z}, S^1, \{e\}, \{\pm 1\}$ は可換群．$G = \mathrm{GL}(2, \mathbf{R}), S_n (n \geqq 3)$ は可換群でない．(非可換群).

演習問題２９． $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R}), S_3$ が非可換であることを示せ.

5.2 群の準同型と同型
G, H を群，$\varphi : G \to H$ を写像とする．
φ が**準同型写像** (略して**準同型**，homomorphism) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall g_1, g_2 \in G, \varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2)$.
(左の $\cdot$ は G での積，右の $\cdot$ は H での積).
このとき，$\varphi(e) = e, \varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$ が成立.
例：$\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$ を $\varphi(x) := e^x$ で定義すると φ は準同型写像．(この e は自然対数の底．単位元とは無関係).
例：$\varphi : \mathbf{R} \to S^1 (\subset \mathbf{C})$ を $\varphi(x) := e^{ix}$ で定義すると φ は準同型写像.
例：$\varphi : \mathrm{GL}(2, \mathbf{R}) \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$ を $\varphi(A) := \det(A)$ で定義すると φ は準同型写像.
例：$\varphi : S_n \to \{\pm 1\}$ を $\varphi(\sigma) := \mathrm{sign}(\sigma)$ (σ の符号．偶置換なら $+1$, 奇置換なら -1) で定義すると φ は準同型写像.
準同型写像 $\varphi : G \to H$ が**同型写像** (略して**同型**, isomorphism) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \varphi$ が全単射であり，逆写像 $\varphi^{-1} : H \to G$ も準同型写像 $\Leftrightarrow \varphi$ が全単射.
準同型写像が全単射なら，逆写像は自動的に準同型となる.

群 G と群 H が**同型** (isomorphic) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ ある同型写像 $\varphi : G \to H$ が存在する．
G と H が同型のとき，$G \cong H$ と書く．
例：$\mathbf{R}_+ := \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$ は普通の乗法について群.
$\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ を $\varphi(x) := e^x$ で定義すると φ は同型写像.
したがって，$\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}_+$ は同型な群.

$G \cong G$,
$G \cong H \Rightarrow H \cong G$
$G \cong H, H \cong K \Rightarrow G \cong K$.

演習問題３０． このことを示せ．

5.3 部分群と正規部分群
G を群，$H \subseteq G$ を部分集合とする．
H が G の**部分群** (subgroup) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$(0) 単位元 $e \in H$ (i) $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 \cdot h_2 \in H$ (ii) $h \in H \Rightarrow h^{-1}$ (h の G の中での逆元) $\in H$
注：G の部分群はそれ自体で群になる．
例：$\mathbf{R}_+$ は $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ の部分群．
例：$\mathbf{Z}$ は $\mathbf{R}$ の部分群．
例：$m \in \mathbf{Z}$ に対し，$m\mathbf{Z}$ は $\mathbf{Z}$ の部分群．
例：$\mathrm{GL}(2, \mathbf{Z})$:=($\det(A) = \pm 1$ である整係数２次正方行列の全体) は $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$ の部分群．
例：A_n := (S_n の中の偶置換の全体) は S_n の部分群．(n **次交代群**)．

G, G' を群，$\varphi : G \to G'$ を準同型写像とする．
$\mathrm{Ker}(\varphi) := \varphi^{-1}(e) := \{g \in G\varphi(g) = e\}$ は G の部分群．
$\mathrm{Im}(\varphi) := \varphi(G) := \{\varphi(g) \mid g \in G\}$ は G' の部分群．

演習問題３１． 準同型写像 $\varphi : G \to G'$ について，φ が単射 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{e\}$ であることと，φ が全射 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(\varphi) = G'$ であることを示せ．

G を群，$H \subseteq G$ を部分群とする．
H が G の**正規部分群** (normal subgroup)
$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall h \in H, \forall g \in G; g^{-1} \cdot h \cdot g \in H$
$\Leftrightarrow \forall g \in G, g^{-1} \cdot H \cdot g \subseteq H$.
例：$\mathbf{R}_+$ は $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ の正規部分群．
例：$\mathbf{Z}$ は $\mathbf{R}$ の正規部分群．
例：$m \in \mathbf{Z}$ に対し，$m\mathbf{Z}$ は $\mathbf{Z}$ の正規部分群．
例：$A_n := \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{は偶置換}\}$ は S_n の正規部分群．
例：$\mathrm{GL}(2, \mathbf{Z})$ は $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$ の正規部分群ではない．

演習問題３２． $H_\lambda \subseteq G (\lambda \in \Lambda)$ を群 G の正規部分群の族とするとき，$H := \cap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ も G の正規部分群であることを示せ．

> $\varphi : G \to G'$ を準同型写像とすると $\mathrm{Ker}(\varphi)$ は G の正規部分群である．

演習問題３３． このことを示せ．
$\mathrm{Im}(\varphi)$ は G' の正規部分群とは限らない．

5.4 剰余群と群の準同型定理
H が群 G の部分群とする．
G の同値関係 $\sim$ を，$g_1 \sim g_2 \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$
$\exists h \in H, g_1 \cdot h = g_2$ ($\Leftrightarrow g_2 \in g_1 H$) で定義する．
$g \in G$ の同値類 $[g]$ は $gH (\subseteq G)$ と表される．

演習問題３４． 上の $\sim$ が G の同値関係であることを確かめよ．

商集合 (剰余集合，等化集合) $G/\sim$ を G/H と表し，G の H による (**右**) **剰余集合**とよび，G/H の各要素を (**右**) **剰余類**とよぶ．
商写像 (剰余写像) は $\pi : G \to G/H$,
$\pi(g) := [g] = gH$ (g の剰余類) で定まる．
H が正規部分群とすると，
$g_1 \sim g_2, g_1' \sim g_2' \Rightarrow g_1 \cdot g_1' \sim g_2 \cdot g_2'$.
そこで，$[g] \cdot [g'] := [g \cdot g'] \in G/H$ で積を定義すると，G/H は群である．このとき，
G/H を G の正規部分群による**剰余群** (residual group, **商群**, quotient group) とよぶ．単位元は $[e]$．$[g]$ の逆元は $[g]^{-1} = [g^{-1}]$ である．
$\pi : G \to G/H$ について，$\mathrm{Ker}(\pi) = H$.
例：$G/G \cong \{e\}$ (自明群と同型).
例：$G/\{e\} \cong G$.
例：$\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, $(\mathbf{R} \setminus \{0\})/\mathbf{R}_+$, S_n/A_n.

> **準同型定理**
> G, K を群，$\varphi : G \to K$ を準同型写像とすると，群の同型写像 $\overline{\varphi} : G/\mathrm{Ker}(\varphi) \to \mathrm{Im}(\varphi)$ が誘導される．

例：$\mathbf{R}/\mathbf{Z} \cong S^1, (\mathbf{R} \setminus \{0\})/\mathbf{R}_+ \cong \{\pm 1\} \cong S_n/A_n$.
演習問題３５． 上の例の主張を証明せよ．

5.5 基本群
p_0 を基点とする． X の**基本群** (fundamental group) $\pi_1(X, p_0) := \Omega(X, p_0)/\simeq$ は群である．
基本群は可換群になることもあるが，一般には非可換群である．
積は $[\ell] \cdot [\ell'] := [\ell \cdot \ell']$ で定義される．
($\ell \cdot \ell'$ は閉じた道の積).

> p_0 と p_1 を結ぶ X 上の道 $m : I \to X$ があれば，群の同型写像 $\varphi : \pi_1(X, p_0) \to \pi_1(X, p_1)$ が，$\varphi([\ell]) := [(m^{-1} \cdot \ell) \cdot m]$ により定まる．
> とくに，X が弧状連結ならば，基本群 $\pi_1(X, p_0)$ の群同型類は，基点 p_0 の取り方によらない．

X が弧状連結のときは，基本群を単に $\pi_1(X)$ と書くことができる．

> $f : (X, p_0) \to (Y, q_0)$ が連続写像のとき，群の準同型写像 $f_\# : \pi_1(X, p_0) \to \pi_1(Y, q_0)$ が，$f_\#([\ell]) := [f \circ \ell]$ で定義される．(これは f **から誘導された準同型写像**と呼ばれる)．

演習問題３６． $f_\#$ が well-defined であることを示せ．

> (1) $f : (X, p_0) \to (Y, q_0)$, $g : (Y.q_0) \to (Z, r_0)$ が連続写像のとき，$g_\# \circ f_\# = (g \circ f)_\# : \pi_1(X, p_0) \to \pi_1(Z, r_0)$ が成立する．
> (2) $(\mathrm{id}_X)_\# : \pi_1(X, p_0) \to \pi_1(X, p_0)$ は恒等写像 $\mathrm{id}_{\pi_1(X, p_0)}$ である．

演習問題３７． 上の (1), (2) を示せ．

> (**基本群の位相不変性**) (X, p_0) と (Y, q_0) が同相ならば，基本群 $\pi_1(X, p_0)$ と $\pi_1(Y, q_0)$ は群同型である．ここで，(X, p_0) と (Y, q_0) が同相とは，連続写像 $f : X \to Y, f(p_0) = q_0$ と連続写像 $g : Y \to X, f(q_0) = p_0$ があって，$g \circ f = \mathrm{id}_X, f \circ g = \mathrm{id}_Y$ が成り立つことである．

演習問題３８． 上を示せ．

5.6 基本的な図形の基本群
(1) $\pi_1(D^n, p_0) \cong \{e\}$ (自明群). $\pi_1(\mathbf{R}^n, p_0) \cong \{e\}$.
(2) $\pi_1(S^1, p_0) \cong \mathbf{Z}$.
(3) $\pi_1(T^2, p_0) \cong \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.
(4) $\pi_1(S^2, p_0) \cong \{e\}$.
(5) $\pi_1(\mathbf{R}P^2, p_0) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
注：$D^n, \mathbf{R}^n, S^1, T^2, S^2, \mathbf{R}P^2$ はすべて弧状連結.
演習問題３９． $\pi_1(D^n, p_0) \cong \{e\}$ と $\pi_1(\mathbf{R}^n, p_0) \cong \{e\}$ を示せ.

応用． 連続写像 $f : D^2 \to D^2$ には少なくとも１つの不動点が存在する.

注：連続写像 $f : D^n \to D^n$ には少なくとも１つの不動点が存在する. 一般には "π_{n-1}"(ホモトピー群) や "H_n"(ホモロジー群) を使うことになる.

● ６．写像のホモトピー

6.1 直積空間
$(X, \mathcal{O}_X), (J, \mathcal{O}_J)$ を位相空間, $X \times J$ を直積集合とする. $X \times J$ の位相が,
$U \subseteq X \times J$ が $X \times J$ の開集合 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall (x,t) \in U, \exists V \in \mathcal{O}_X, W \in \mathcal{O}_J, x \in V, t \in W, V \times W \subseteq U$
で定義される. この位相を X と J からの**直積位相**という. 直積位相を入れた直積集合を**直積空間**とよぶ.

演習問題４０． $\mathbf{R}^2$ 上の $\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}$ からの直積位相と, $\mathbf{R}^2$ 上の通常のユークリッド位相が一致する (開集合系が同じ) ことを示せ.
演習問題４１． 射影 $\pi_X : X \times J \to X$, $\pi_J : X \times J \to J$ は連続写像であることを示せ.
演習問題４２． 各 $t_0 \in J$ について, $i_{t_0} : X \to X \times J$, $i_{t_0}(x) := (x, t_0)$ は連続写像であることを示せ.

演習問題４３． X, Y を位相空間, $p_0 \in X, q_0 \in Y$ とするとき, 群同型 $\pi_1(X \times Y, (p_0, q_0)) \cong \pi_1(X, p_0) \times \pi_1(Y, q_0)$ を示せ.

6.2 連続写像のホモトピー
X, Y を位相空間, $f, g : X \to Y$ を連続写像とする.

f **が** g **にホモトープ** (homotope, homotopic) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 連続写像 $H : X \times I \to Y$ で, $H(x,0) = f(x), H(x,1) = g(x)$ となるものが存在する.

このとき, $f \simeq g$ と書く. H は f **から** g **へのホモトピー** (homotopy) とよばれる. $f, g, h : X \to Y$ を連続写像とするとき,

(1) $f \simeq f$, (2) $f \simeq g \Rightarrow g \simeq f$, (3) $f \simeq g, g \simeq h \Rightarrow f \simeq h$.

演習問題４４． 上を示せ.

$f, g : X \to Y, f', g' : Y \to Z$ を連続写像とするとき, $f \simeq g, f' \simeq g' \Rightarrow f' \circ f \simeq g' \circ g$.

演習問題４５． 上を示せ.

$A \subseteq X$ を閉集合, ホモトピー $H : X \times I \to Y$ が A **を止めている** (A **上で停留する**, stationary) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in A, \forall s \in I$, $H(x,s) = H(x,0)$.
A を止める f から g へのホモトピーが存在するとき, $f \simeq_A g$ と書く.

注：道 $\ell, \ell' : I \to Y$ について, $X = I$ と考えると, 前に定義した $\ell \simeq \ell'$ は, 今の言葉で言えば, $A = \partial I (:= \{0, 1\})$ で停留するホモトピーがあること, つまり, $\ell \simeq_{\partial I} \ell'$ と書ける.

6.3 写像のホモトピーと基本群準同形
基点つきの場合, 連続写像 $f : (X, p_0) \to (Y, q_0)$ と $g : (X, p_0) \to (Y, q_0)$ が**基点を止めてホモトープ** ($f \simeq_{p_0} g$) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \{p_0\}$ を止める f から g へのホモトピーが存在する：$H(x,0) = f(x), H(x.1) = g(x), H(p_0, s) = q_0$. このとき, 次が成立する：

$f \simeq_{p_0} g \Rightarrow f_\# = g_\# : \pi_1(X, p_0) \to \pi_1(Y, q_0)$.

● ７．空間の同相とホモトピー同値

7.1 ホモトピー同値.
X と Y を位相空間とする.
連続写像 $f : X \to Y$ が**同相写像** (homeomorphism) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} f$ が連続かつ全単射で, f^{-1} も連続.
X と Y が**同相である** (homeomorphic)(あるいは, **位相同形である** (topologically isomorphic) ともいう) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} X$ から Y への同相写像が存在する.
このとき, $X \approx Y$ と書く.

X, Y, Z を位相空間とするとき, (1) $X \approx X$, (2) $X \approx Y \Rightarrow Y \approx X$, (3) $X \approx Y, Y \approx Z \Rightarrow X \approx Z$.

演習問題４６． 上を示せ.

連続写像 $f : X \to Y$ が**ホモトピー同値写像** (homotopy equivalence) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 連続写像 $g : Y \to X$ で, $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X : X \to X$ かつ $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y : Y \to Y$ をみたすものが存在する.
X と Y が**ホモトピー同値** (homotopically eqivalent) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} X$ から Y へのホモトピー同値写像が存在する.

このとき, $X \simeq Y$ と書く.
注：記号 $\simeq$ は写像がホモトープであることと, 位相空間がホモトピー同値であることの両方に使うことに注意. 混同しないように.

X, Y, Z を位相空間とするとき, (1) $X \simeq X$, (2) $X \simeq Y \Rightarrow Y \simeq X$, (3) $X \simeq Y, Y \simeq Z \Rightarrow X \simeq Z$.

演習問題４７． 上を示せ.

7.2 同相とホモトピー同値.

X, Y を位相空間とするとき，$X \approx Y \Rightarrow X \simeq Y$.

演習問題４８． 上を示せ.

7.3 ホモトピー同値と基本群.

X, Y を弧状連結な位相空間とする.
$X \simeq Y$ (ホモトピー同値) $\Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$ (群同型).

演習問題４９． X, Y を位相空間，$p_0 \in X, q_0 \in Y$，$f : (X, p_0) \to (Y, q_0)$ を連続写像とする．もし，連続写像 $g : (Y, q_0) \to (X, p_0)$ があって，$g \circ f \simeq_{p_0} \mathrm{id}_X$，$f \circ g \simeq_{p_0} \mathrm{id}_Y$ (基点を止めてホモトープ) が成り立つならば，$f_\# : \pi_1(X, p_0) \to \pi_1(Y, q_0)$ は群同型写像であることを証明せよ.

7.3 変位レトラクト.
X を位相空間，$A \subseteq X$ を部分空間とする.

A が X の**レトラクト** (retract) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 連続写像 $f : X \to A$ で，$\forall p \in A$ に対し，$f(p) = p$ となる，つまり，$f|_A = \mathrm{id}_A$ をみたすものがある.

上の条件を満たす写像 f を**レトラクション** (retraction) とよぶ.
演習問題５０． $\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$ と $\pi_1(D^2) \cong \{e\}$ をを用いて，$S^1 \subset D^2$ は D^2 のレトラクトではありえないことを示せ.

A が X の**変位レトラクト** (deformation retact) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 連続写像 $H : X \times I \to X$ で，(i) $\forall p \in X, H(p, 0) = p$, (ii) $\forall p \in X$, $H(p, 1) \in A$, (iii) $\forall p \in A, \forall s \in I$, $H(p, s) = p$ の３条件をみたすものが存在する.

演習問題５１． $f_s(p) = H(p, s)$ とおくとき，上の３条件は，それぞれ，(i) $f_0 = \mathrm{id}_X$, (ii) $f_1(X) \subseteq A$, (iii) $\forall s \in I, f_s|_A = \mathrm{id}_A$, と書き換えられることを確かめよ.
演習問題５２． メビウスの帯 $X := (I \times I)/\sim, (0, y) \sim (1, 1 - y)$, に対し，$A := \{[(x, \frac{1}{2})] \in X\} (\approx S^1)$ は X の変位レトラクトであることを示せ.

A が位相空間 X の変位レトラクトならば，包含写像 $i : A \to X$ はホモトピー同値写像である.

演習問題５３． $A \subseteq X$ が変位レトラクト，$p_0 \in A$ とするとき，$\pi_1(X, p_0) \cong \pi_1(A, p_0)$ を示せ.

位相空間 X が**強い意味で可縮** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ ある１点 $p_0 \in X$ に関して，$\{p_0\}$ が X の変位レトラクト.
位相空間 X が**弱い意味で可縮** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{id}_X : X \to X$ が，ある定値写像とホモトープ.

演習問題５４． 位相空間 X が強い意味で可縮ならば，弱い意味で可縮であることを示せ.
演習問題５５． 位相空間 X が弱い意味で可縮ならば，X は弧状連結であることを示せ.
演習問題５６． 位相空間 X が弱い意味で可縮ならば，任意の基点 $p_0 \in X$ について，$\pi_1(X, p_0) \cong \{e\}$ であることを示せ.
演習問題５７． D^n や $\mathbf{R}^n$ は強い意味で可縮であることを示せ.

● ８．円周の基本群と写像度

8.1 リフトと写像度.
5.6 で紹介した

$\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$.

を改めて丁寧に証明する.
$S^1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} (= \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\})$.
基点は $p_0 = (1, 0) \in \mathbf{R}^2$ ($p_0 = 1 \in \mathbf{C}$) にとる.
$\Omega(S^1, p_0) := \{\ell : I \to S^1 \mid \ell$ は連続$, \ell(0) = p_0, \ell(1) = p_0\}$. $(I = [0, 1])$.
$\ell \in \Omega(S^1, p_0)$ に対して，**写像度** (mapping degree, あるいは**回転数**, rotation number) $\deg(\ell) \in \mathbf{Z}$ を定義する．そのために，まず，次を確認：

連続写像 $\widetilde{\ell} : I \to \mathbf{R}$ で，$e^{i2\pi\ell(t)} = \ell(t)$, $\widetilde{\ell}(0) = 0$ を満たすものが唯一つ存在する．$(i = \sqrt{-1})$.

注：条件 $e^{i2\pi\ell(t)} = \ell(t)$ は，$(\cos 2\pi\ell(t), \sin 2\pi\ell(t)) = \ell(t)$ ということ.
$\pi : \mathbf{R} \to S^1$ を，$\pi(x) := e^{i2\pi x}, (x \in \mathbf{R})$ で定義すると，$\pi \circ \widetilde{\ell} = \ell$．このとき，$\widetilde{\ell}$ を π に関する ℓ のリフト (lift, lifting) と呼ぶ.
さて，

$\widetilde{\ell}$ を π に関する ℓ のリフトとするとき，$\deg(\ell) := \widetilde{\ell}(1)$.

注：$exp(i2\pi\widetilde{\ell}(1)) = \ell(1) = 1$ なので，$\widetilde{\ell}(1) \in \mathbf{Z}$.

8.2 リフトの存在と一意性の証明.
存在：$\ell : [0, 1] \to S^1$ は**一様連続**なので，n を十分大きくとると，$\ell([\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]), j = 1, 2, \ldots, n$ は S^1 全体にならない.
$\pi : \mathbf{R} \to S^1$ について，S^1 から１点 q_0 を除くと，連続写像 $s : S^1 \setminus \{q_0\} \to \mathbf{R}$ で $(\pi \circ s)(z) = z (z \in S^1 \setminus \{q_0\})$ となるものが存在する．(さらに，与えられた $x_0 \in \mathbf{R}, \pi(x_0) \neq q_0$

に対して，$s(\pi(x_0)) = x_0$ となるようにできる)．このことを使って，リフト $\widetilde{\ell}$ を $[0, \frac{1}{n}]$ 上で定め，それを延ばして，$[0, \frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ 上で定め，最終的に，$[0,1]$ 上に拡張する．
一意性：2つのリフト $\widetilde{\ell}, \widetilde{\ell}'$ で，$\widetilde{\ell}(0) = 0, \widetilde{\ell}'(0) = 0$ があったとすると，$e^{i2\pi\ell(t)} = \ell(t) = (e^{i2\pi\ell'(t)}$ なので，$e^{i2\pi(\ell(t)-\ell'(t))} = 1$．したがって，$f(t) := \widetilde{\ell}(t) - \widetilde{\ell}'(t) \in \mathbf{Z}, (0 \leqq t \leqq 1)$．$S^1$ は**連結**なので，$f(t)$ は一定値をとる．$t = 0$ のとき，$f(0) = \widetilde{\ell}(0) - \widetilde{\ell}'(0) = 0$ なので，$f(t) = 0, (0 \leqq t \leqq 1)$．よって，$\widetilde{\ell}(t) = \widetilde{\ell}'(t), (0 \leqq t \leqq 1)$．よって，$\widetilde{\ell} = \widetilde{\ell}'$.

> 位相空間 X が**連結**
> $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} X$ の開集合 U, V で $X = U \cup V$ ならば $U \neq \emptyset$ または $V \neq \emptyset$
> $\Leftrightarrow X$ の開かつ閉集合は $\emptyset$ か X 自体だけ.

演習問題５８． X を連結な位相空間，$f : X \to \mathbf{R}$ を連続写像とする．もし $f(X) \subseteq \mathbf{Z}$ ならば，f は定値写像であることを示せ.

8.3 道のホモトピーと写像度.

> $\ell, \ell' \in \Omega(S^1, p_0)$ に対して，
> $\ell \simeq \ell' \Rightarrow \deg(\ell) = \deg(\ell')$.

実際，ℓ から ℓ' への p_0 を止めたホモトピー $H : I \times I \to S^1$ があるが，その“リフト”$\widetilde{H} : I \times I \to \mathbf{R}$, (連続写像で $\pi \circ \widetilde{H} = H$ をみたすもの) で $\widetilde{H}(0,0) = 0$ を満たすものを構成する．すると，$\widetilde{H}(0,s) = 0$ であり，$\widetilde{H}(1,s)$ は s によらず一定．しかも，リフトの一意性 (8.1, 8.2) から $\widetilde{H}(t,0) = \widetilde{\ell}(t), \widetilde{H}(t,1) = \widetilde{\ell}'(t)$．したがって，$\deg(\ell) = \widetilde{\ell}(1) = \widetilde{H}(1,0) = \widetilde{H}(1,1) = \widetilde{\ell}'(1) = \deg(\ell')$.
参考項目：

> (X, d_X) を距離空間とする．このとき，次が成り立つ：X がコンパクト $\Leftrightarrow X$ の任意の点列 (p_n) が収束する部分列 $(p_{n(k)})$ を持つ.

$(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間，
写像 $f : X \to Y$ が**一様連続** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall p, \forall q \in X$, $d_X(p,q) < \delta \Rightarrow d_Y(f(p), f(q))$.

> X, Y を距離空間，X はコンパクトとする．このとき，任意の連続写像 $f : X \to Y$ は一様連続である.

8.4 写像度が準同型写像を誘導すること.
8.3 の結果から，写像 $\deg : \pi_1(S^1, p_0) \to \mathbf{Z}$ が誘導される.

> $\ell, m \in \Omega(S^1, p_0)$ に対して，
> $\deg(\ell \cdot m) = \deg(\ell) + \deg(m)$. ($\ell \cdot m$ は道の積).

$\widetilde{\ell}, \widetilde{m} : I \to \mathbf{R}$ をそれぞれ ℓ, m のリフトで，$\widetilde{\ell}(0) = 0$, $\widetilde{m}(0) = 0$ とするとき，
$\widetilde{\ell \cdot m}(t) := \widetilde{\ell}(2t)(0 \leq t \leq \frac{1}{2})$,
$\widetilde{\ell \cdot m}(t) := \widetilde{\ell}(1) + \widetilde{m}(2t-1)(\frac{1}{2} \leq t \leq 1)$
とおくと，$\widetilde{\ell \cdot m} : I \to \mathbf{R}$ は，$\ell \cdot m$ のリフトで，$\widetilde{\ell \cdot m}(0) = 0$ を満たす．したがって，$\deg(\ell \cdot m) = \widetilde{\ell \cdot m}(1) = \widetilde{\ell}(1) + \widetilde{m}(1) = \deg(\ell) + \deg(m)$.

8.5 $\deg : \pi_1(S^1, p_0) \to \mathbf{Z}$ が群同型写像であること.
単射であること：
$\ell, \ell' \in \Omega(S^1, p_0)$ とし，$\deg(\ell) = \deg(\ell')$ とする．リフト $\widetilde{\ell}, \widetilde{\ell}'$ について，$\widetilde{\ell}(1) = \widetilde{\ell}'(1)$ である．そこで，$\mathbf{R}$ 上の道として，$\widetilde{\ell}$ から $\widetilde{\ell}'$ へのホモトピー $\widetilde{H} : I \times I \to \mathbf{R}$ を，$\widetilde{H}(t,s) := (1-s)\widetilde{\ell}(t) + s\widetilde{\ell}'(t)$ で定義できる．$H := \pi \circ \widetilde{H} : I \times I \to S^1$ とおくと，H は S^1 上の ℓ から ℓ' への基点 p_0 を止めたホモトピーを与える．したがって，$\ell \simeq \ell'$.
よって，$[\ell] = [\ell'] \in \pi_1(S^1, p_0)$.
全射であること：
各 $n \in \mathbf{Z}$ に対し，$\ell_n(t) := e^{i2n\pi t}$ とおくと，$\ell_n \in \Omega(S^1, p_0)$ で，$\deg(\ell_n) = n$.
演習問題５９． $\deg(\ell_n) = n$ を示せ.

● ９．融合積とファンカンペンの定理.

9.1 自由群
$2n$ 個の文字 $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_n^{-1}$ からなる有限文字列を**語** (word) という.
例：$w = x_2x_1^{-1}x_3x_1x_2^{-1}x_2^{-1}.v = x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}$ 等.
空語 (何もない文字列) も語の一種と見なし，e で表す.
語の積も自然に定義される.
語の全体の集合 $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に同値関係 $\sim$ を導入する：$w \sim v \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 語の中の $x_ix_i^{-1}$ や $x_j^{-1}x_j$ という部分を取り除いたり，付け加えたりして w から v に変形される.
例：$x_1x_3^{-1}x_3x_2 \sim x_1x_2 \sim x_1x_1^{-1}x_1x_2$ このとき，

> $w \sim v$ かつ $w' \sim v' \Rightarrow ww' \sim vv'$.

商集合 $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)/\sim$ は群になる．これを，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ で生成される**自由群** (free group) とよび，$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ あるいは，$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ で表される.
単位元は空語 e の同値類．$x_1x_2^{-1}$ の逆元は，$x_2x_1^{-1}$．実際，$x_1x_2^{-1}x_2x_1^{-1} \sim x_1x_1^{-1} \sim e$.
例：$n = 1$ の場合，$F(x_1) = \langle x_1 \rangle$ は，x_1 で生成される巡回群であり，$\mathbf{Z}$ と群同型であり，可換群である.
例：$n = 2$ の場合，$F(x_1, x_2) = \langle x_1, x_2 \rangle$ は非可換群である：$x_1x_2 \neq x_2x_1$.
$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の元を，その代表元である語で表す．たとえば，$x_1x_3^{-1}x_3x_2 = x_1x_2 = x_1x_1^{-1}x_1x_2$ 等.

9.2 群の表示
$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の中の元 $w_1, w_2, \ldots, w_s$ に対して，$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の中の $w_1, w_2, \ldots, w_s$ を含む最小の正規部分群を $|w_1, w_2, \ldots, w_s|$ で表す．そして，商群 (剰余群) $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)/|w_1, w_2, \ldots, w_s|$ を
$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n | w_1, w_2, \ldots, w_s \rangle$

あるいは，$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n | w_1 = e, w_2 = e, \ldots, w_s = e\rangle$ で表す．

9.3 群の融合積
G, H, K を群とし，$\varphi : K \to G$ と $\psi : K \to H$ を群準同型写像とする．
まず，G の元と H の元からなる語の全体を考える：$x_1 x_2 \ldots x_n$ ($x_i \in G$ または $x_i \in H$) の形の語で，空語も許す．それを e と書く．
ただし，

$x_1 x_2 \ldots x_n = y_1 y_2 \cdots y_m$
である必要十分条件は，e_G や e_H を挿入，消去という操作と，x_i, x_{i+1} が共に G の元か，共に H の元のとき，$\cdots x_i x_{i+1} \cdots$ を $\cdots (x_i x_{i+1}) \cdots$ に置換，またはその逆操作を有限回くり返して互いに移りあうことである，

という具合に同一視する．(自由群の構成と類似)．このような語の全体は群になる．これを G と H の**自由積** (free product) と呼び，$G * H$ と書く．
さらに，$\varphi(K)^{-1}\psi(K) := \{\varphi(k)^{-1}\psi(k) \in G*K \mid k \in K\}$ とおき，$|\varphi(K)^{-1}\psi(K)|$ を，$G * K$ の中で $\varphi(K)^{-1}\psi(K)$ を含む最小の正規部分群を表すとき，

$G *_K H := G * H / |\varphi(K)^{-1}\psi(K)|$
(G と H の K による融合積 (amalgamation))．

と定義する．融合積は，準同型 φ や ψ にも依存する．

注：$K = \{e\}$ のとき，$G *_{\{e\}} H \cong G * H$ である．
例:$G = \langle x_1 \rangle$ (自由群), $H = \langle x_2 \rangle$(自由群) のとき，$G*H \cong \langle x_1, x_2 \rangle$ (自由群)．例:$G = \langle x_1, x_2 \rangle$ (自由群), $H = \langle x_3 \rangle$(自由群) のとき，$G * H \cong \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$(自由群)．以下同様．

9.4 ファンカンペンの定理

X を位相空間，X_1, X_2 を X の開集合，$X_0 = X_1 \cap X_2$ は弧状連結とし，$p_0 \in X_0$ とする．このとき，$\pi_1(X, p_0) \cong \pi_1(X_1, p_0) *_{\pi_1(X_0, p_0)} \pi_1(X_2, p_0)$ (融合積)．

証明のおおよその筋道を講義で説明する予定．

9.5 ブーケの基本群
r 個の円周 S^1 を１点で接着してできる空間を $\vee_r S^1$ で表す．$\vee_2 S^1 = S^1 \vee S^1$ は 8 の字である．

$\pi_1(\vee_r S^1) \cong \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$ (自由群)．

9.6 球面の基本群

$\pi_1(S^n) \simeq \{e\}$ 自明群 ($n \geqq 2$)．
($\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$ に注意)．

9.7 円板の貼り合わせによる基本群の変化

$\pi_1(D^2 \cup_\varphi X, p_0) \cong \pi_1(X, p_0)/|[A]|$．
ただし，φ は D^2 の境界から X の部分空間 A への同相写像．

例：トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ の基本群は $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ と同型である (5.6, 演習問題４３参照)．$p_0 = (1, 1), A = S^1 \times \{1\}$ とし，D^2 を A に沿って T^2 に貼り付けて得られる空間 $D^2 \cup_\varphi T^2$ (φ は適当にとる) の基本群は，$\mathbf{Z}$ と同型である．
したがって,「クロワッサン」の２つの先端をくっつけてできる図形 ($D^2 \cup_\varphi T^2$ とホモトピー同値) の基本群も $\mathbf{Z}$ と同型である．

演習問題６０．
(1) メビウスの帯の基本群を求めよ (演習問題５２参照)．
(2) メビウスの帯の境界に沿って，円板をはりつけてできる曲面 (つまり射影平面) の基本群を，ファンカンペンの定理を使って求めよ．

9.8 閉曲面の基本群

$\pi_1(\#_g T^2) \cong$
$\langle x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_g, y_g \mid$
$x_1^{-1} y_1^{-1} x_1 y_1 x_2^{-1} y_2^{-1} x_2 y_2 \cdots x_g^{-1} y_g^{-1} x_g y_g = e\rangle$

$\pi_1(\#_g \mathbf{R}P^2) \cong \langle x_1, x_2, \ldots, x_g \mid x_1^2 x_2^2 \cdots x_g^2 = e\rangle$．

基本用語集．位相空間．開集合．閉集合．開集合系．閉集合系．同相である．位相同形．相対位相．商位相．向き付け可能．向き付け不可能．コンパクト空間．ハウスドルフ空間．可算基．連続写像．道．道の合成．群．群準同型．群同型．基本群．直積位相．ホモトピー．ホモトピー同値．不動点．写像度．弧状連結．連結．レトラクト．変形レトラクト．強い意味で可縮．弱い意味で可縮．自由積．融合積．ファンカンペンの定理．
