幾何学２(トポロジー入門)(2003年度前期)

担当教官　石川　剛郎(いしかわ　ごうお，北海道大学理学研究科)

演習問題解答例(略解)

演習問題５０．$\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$ と $\pi_1(D^2) \cong \{e\}$ を用いて，$S^1 \subset D^2$ は D^2 のレトラクトではありえないことを示せ．

解答．$S^1 \subset D^2$ が D^2 のレトラクトとする．即ち，$\exists f : D^2 \to S^1$:連続写像 s.t. $f|_{S^1} = id_{S^1}$．$\iota : S^1 \to D^2$ を包含写像とする．この時，$f \circ \iota = id_{S^1}$ であるので，これから $(f \circ \iota)_\# = (id_{S^1})_\#$ が誘導される．ここで $(id_{S^1})_\#(\pi_1(S^1)) = \pi_1(S^1)$ であり，$\pi_1(S^1) = (f \circ \iota)_\#(\pi_1(S^1)) = f_\# \circ \iota_\#(\pi_1(S^1)) \subset f_\#(\pi_1(D^2))$．よって，$f_\#$ は $\pi_1(D^2) \cong \{e\}$ から $\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$ への全射であることになり矛盾する．($f_\#$ は１点からの写像だから単射であることも導かれ，$f_\#$ が同型であることになり，$\{e\}$ と $\mathbf{Z}$ が同型でないことに矛盾すると書いてもよい)．

演習問題５２．メビウスの帯 $X := (I \times I)/\sim$，$(0, y) \sim (1, 1-y)$ に対し，$A := \{[(x, \frac{1}{2})] \in X\}(\approx S^1)$ は X の変位レトラクトであることを示せ．

解答．$f : X \times I \to X$ を $f([(x, y)], t) = [(x, \frac{1}{2}t + (1-t)y)]$ とする．この時，f は well-defined であり，連続である．また，(i) $\forall [(x, y)] \in X, f([(x, y)], 0) = [(x, y)]$, (ii) $\forall [(x, y)] \in X, f([(x, y)], 1) = [(x, \frac{1}{2})] \in A$, (iii) $\forall [(x, \frac{1}{2})] \in A,\ \forall t \in I, f([(x, \frac{1}{2})], t) = [(x, \frac{1}{2})]$ であるので $A := \{[(x, \frac{1}{2})] \in X\}(\approx S^1)$ は X の変位レトラクトである

演習問題５７．D^n や $\mathbf{R}^n$ は強い意味で可縮であることを示せ．

解答．• D^n について，強い意味で可縮を示すので $0 \in D^n$ に対して考える．$f : D^n \times I \to D^n$ を $f(x, t) = (1-t)x$ で定義する．ここで $||(1-t)x|| \leq ||x|| \leq 1$ であるので $(1-t)x \in D^n$ であることに注意する．また f は連続であり，(i) $\forall x \in D^n,\ f(x, 0) = x$, (ii) $\forall x \in D^n,\ f(x, 1) = 0 \in \{0\}$, (iii) $\forall 0 \in \{0\}, \forall t \in I,\ f(0, t) = 0$ であるので１点 $\{0\}$ が D^n の変位レトラクトである．よって D^n は強い意味で可縮である．

• $\mathbf{R}^n$ に対しても同様．$g : \mathbf{R}^n \times I \to \mathbf{R}^n$ を $g(x, t) = (1-t)x$ とすればよい．あとは条件を確かめること．