幾何学２ (トポロジー入門)(2003 年度前期)

担当教官　石川　剛郎 (いしかわ　ごうお，北海道大学理学研究科)

演習問題解答例 (略解)

演習問題４３．X, Y を位相空間，$p_0 \in X$，$q_0 \in Y$ とする時，群同型 $\pi_1(X \times Y, (p_0, q_0)) \cong \pi_1(X, p_0) \times \pi_1(Y, q_0)$ を示せ．

解答．$\phi : \pi_1(X \times Y, (p_0, q_0)) \to \pi_1(X, p_0) \times \pi_1(Y, q_0)$ を $\phi([\ell]) = ([\pi_X \circ \ell], [\pi_Y \circ \ell])$ を置く．ただし，$\pi_X : X \times Y \to X$，$\pi_Y : X \times Y \to Y$ は射影とする．すると，この写像が well-defined である (自分でチェックすること)．さらに $\forall[\ell], [m] \in \pi_1(X \times Y, (p_0, q_0))$ に対して $\phi([\ell] \cdot [m]) = \phi([\ell \cdot m]) = ([\pi_X \circ (\ell \cdot m)], [\pi_Y \circ (\ell \cdot m)]) = ([\pi_X \circ \ell] \cdot [\pi_X \circ m], [\pi_Y \circ \ell] \cdot [\pi_Y \circ m]) = ([\pi_X \circ \ell], [\pi_Y \circ \ell]) \cdot ([\pi_X \circ m], [\pi_Y \circ m]) = \phi([\ell]) \cdot \phi([m])$ であるので ϕ が準同型である．ここで $\psi : \pi_1(X, p_0) \times \pi_1(Y, q_0) \to \pi_1(X \times Y, (p_0, q_0))$ を $\psi([\ell], [m]) = [(\ell, m)]$ とすると，ただし $[(\ell, m)]$ は $(\ell, m) : I \to X \times Y$ に対し，$(\ell, m)(t) = (\ell(t), m(t))$ と定義する道に対する同値類とする．ψ も well-defined であることが分かる．この時，$\phi \circ \psi([\ell], [m]) = \phi[(\ell, m)] = ([\pi_X \circ (\ell, m)], [\pi_Y \circ (\ell, m)]) = ([\ell], [m])$．$\psi \circ \phi([\ell]) = \psi([\pi_X \circ \ell], [\pi_Y \circ \ell]) = [(\pi_X \circ \ell, \pi_Y \circ \ell)] = [\ell]$ であるから $\phi \circ \psi = id_{\pi_1(X, p_0) \times \pi_1(Y, q_0)}$，$\psi \circ \phi = id_{\pi_1(X \times Y, (p_0, q_0))}$ なので ϕ は同型を与える．

演習問題４５．$f, g : X \to Y$, $f', g' : Y \to Z$ を連続写像とする時，$f \simeq g$，$f' \simeq g' \Rightarrow f' \circ f \simeq g' \circ g$ であることを示せ．

解答．$H : X \times I \to Y$ を $f \simeq g$, $H' : Y \times I \to Z$ を $f' \simeq g'$ を与えるホモトピーとする．この時，$H'' : X \times I \to Z$ を $H''(x, t) = H'(H(x, t), t)$ と置けば，これが $f' \circ f \simeq g' \circ g$ を与えるホモトピーであることを見る．H, H' の定義から $H''(x, 0) = H'(H(x, 0), 0) = f'(f(x)) = f' \circ f(x)$, $H''(x, 1) = H'(H(x, 1), 1) = g'(g(x)) = g' \circ g(x)$ である．あとは H'' が連続となることを示せばよい．今，$\bar{H} : X \times I \to Y \times I$ として，$\bar{H}(x, t) = (H(x, t), t)$ を考える．すると，この写像は H が連続であることと直積位相の定義から連続であることが分かる．$H'' = H' \circ \bar{H}$ なので連続写像の合成は連続であるから H'' も連続である．

• 注意: ～は分かる．と書いたところをきちんと自分で証明すること．