

幾何学 2 (トポロジー入門)(2003 年度前期)

担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお, 北海道大学理学研究科)

演習問題解答例 (略解)

演習問題 3 3 . $\varphi : G \rightarrow G'$ を準同型写像とすると $\text{Ker}(\varphi)$ は G の正規部分群であることを示せ .
解答 . 定義どおりに示せばよい . ほとんどの人が $\text{Ker}(\varphi)$ が G の部分群になることを示していなかったが正規部分群であるためには部分群であることが必要である .

• $\text{Ker}(\varphi)$ が G の部分群であること: φ が準同型より $\varphi(e_G) = e_{G'}$ (*) であるので $e_G \in \text{Ker}(\varphi)$. ここで e_G は G の単位元, $e_{G'}$ は G' の単位元とする . $\forall a, b \in \text{Ker}(\varphi)$ とすると $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) = e_{G'} \cdot e_{G'} = e_{G'}$ であるので $a \cdot b \in \text{Ker}(\varphi)$.

さらに, $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} = e_{G'}^{-1} = e_{G'}$ (**) であることから $a^{-1} \in \text{Ker}(\varphi)$. よって $\text{Ker}(\varphi)$ は G の部分群 .

• 正規部分群になること: $\forall g \in G, \forall a \in \text{Ker}(\varphi)$ に対して $g^{-1} \cdot a \cdot g \in \text{Ker}(\varphi)$ を示せばよい .
 $\varphi(g^{-1} \cdot a \cdot g) = \varphi(g^{-1}) \cdot \varphi(a) \cdot \varphi(g) = \varphi(g)^{-1} \cdot e_{G'} \cdot \varphi(g) = \varphi(g)^{-1} \cdot \varphi(g) = e_{G'}$ であるので $\text{Ker}(\varphi)$ は G の正規部分群である .

演習問題 3 6 . $f : (X, p_0) \rightarrow (Y, q_0)$: 連続写像に対して, $f_{\#} : \pi_1(X, p_0) \rightarrow \pi_1(Y, q_0)$; $f_{\#}([\ell]) = [f \circ \ell]$ が well-defined であることを示せ .

解答 . $[\ell] = [\ell'] \implies f_{\#}[\ell] = f_{\#}[\ell']$ を示せばよい . $[\ell] = [\ell']$ より $\ell \simeq \ell'$ であるので ℓ と ℓ' を結ぶホモトピーが存在する . i.e., $\exists H : I \times I \rightarrow X$: 連続写像 s.t. $H(t, 0) = \ell(t), H(t, 1) = \ell'(t), H(0, s) = p_0, H(1, s) = p_0$. 今, 示したいのは $f \circ \ell \simeq f \circ \ell'$. そこで $f \circ H : I \times I \rightarrow Y$ を考える . f, H が連続写像なので $f \circ H$ も連続写像であり, $f \circ H(t, 0) = f \circ \ell(t), f \circ H(t, 1) = f \circ \ell'(t), f \circ H(0, s) = f(p_0) = q_0, f \circ H(1, s) = f(p_0) = q_0$ となり $f_{\#}([\ell]) = [f \circ \ell] = [f \circ \ell'] = f_{\#}([\ell'])$.

問 . 上の状況の下, 次を示せ .

(*) $\varphi(e_G) = e_{G'}$.

(**) $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

群と準同型の定義から出てくるが, 頭の体操で考えてみると良いかも . もちろんレポートなどで出してくれたら添削いたします .