幾何学２ (トポロジー入門)(2003 年度前期)

担当教官　石川　剛郎 (いしかわ　ごうお，北海道大学理学研究科)

演習問題解答例 (略解)

演習問題２９．$GL(2,\mathbf{R})$, S_3 が非可換であることを示せ．
解答．ほとんどの人があっていました．プリントにもあるように群 G が可換であるとは $\forall g,\ h \in G$ に対して $g\cdot h = h\cdot g$ となることです．ですから非可換であることは $\exists g,\ h \in G$ s.t. $g\cdot h \neq h\cdot g$ です．一つでもあればいいのですね．
●$GL(2,\mathbf{R})$ の場合，例えば，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると $\det(A) = \det(B) = 1 \neq 0$ であるので $A,\ B \in GL(2,\mathbf{R})$ である．
$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ であるので $AB \neq BA$. よって $GL(2,\mathbf{R})$ は非可換である．
●S_3 の場合，例えば，$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ とすると $\sigma,\ \tau \in S_3$ であり，$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ となるので $\sigma\tau \neq \tau\sigma$. よって S_3 は非可換である．

演習問題３０．同型が同値関係であることを示せ．
解答．(1) $G \cong G$, (2) $G \cong H \Longrightarrow H \cong G$, (3) $G \cong H,\ H \cong K \Longrightarrow G \cong K$ を示せばよい．
(1), $id : G \to G$ を考えると，id は全単射で準同型である．よって $G \cong G$.

(2), $\varphi : G \to H$ を同型写像であるとする．この時，$\varphi^{-1} : H \to G$ は全単射である．準同型であることを示す．$\forall h_1,\ h_2 \in H$ に対して，$\exists g_1,\ g_2 \in G$ s.t. $\varphi(g_1) = h_1,\ \varphi(g_2) = h_2$ また $\varphi^{-1}(h_1) = g_1,\ \varphi^{-1}(h_2) = g_2$ である．$\varphi^{-1}(h_1\cdot h_2) = \varphi^{-1}(\varphi(g_1)\cdot\varphi(g_2)) = \varphi^{-1}(\varphi(g_1\cdot g_2)) = \varphi^{-1}\circ\varphi(g_1\cdot g_2) = g_1\cdot g_2 = \varphi^{-1}(h_1)\cdot\varphi^{-1}(h_2)$ であるから φ^{-1} は準同型である．(プリントに書いてある通り準同型写像が全単射なら，逆写像も準同型写像になる証明が上である) よって $H \cong G$.

(3), $\varphi : G \to H,\ \phi : H \to K$ を同型写像とする．$\phi\circ\varphi : G \to K$ を考える．この写像は全単射である．さらに $\forall g_1, g_2 \in G$ に対して $\phi\circ\varphi(g_1\cdot g_2) = \phi(\varphi(g_1\cdot g_2)) = \phi(\varphi(g_1)\cdot\varphi(g_2)) = \phi(\varphi(g_1))\cdot\phi(\varphi(g_2)) = \phi\circ\varphi(g_1)\cdot\phi\circ\varphi(g_2)$ であるから $\phi\circ\varphi$ は準同型である．よって $G \cong K$.