幾何学２ (トポロジー入門)(2003 年度前期)

担当教官　石川　剛郎 (いしかわ　ごうお，北海道大学理学研究科)

演習問題解答例 (略解)

演習問題２６．X, Y を位相空間，A, B を X の閉集合，$H|_A : A \to Y$ と $H|_B : B \to Y$ が共に連続ならば，H も連続であることを示せ.

解答．任意の $F \subset Y$ 閉集合に対して $H^{-1}(F) \subset X$ が閉集合になることを示せばよい．(これは授業で定義した連続の定義「開集合の引き戻しが開集合になる」ことと同値である—(∗)) A, B には X からの相対位相を入れてある．$H|_A$ が連続であるので $(H|_A)^{-1}(F) = H^{-1}(F) \cap A$ は A の閉集合である．よって $\exists F' : X$ の閉集合 $s.t. F' \cap A = (H|_A)^{-1}(F)$．いま A が X の閉集合であるので $H^{-1}(F) \cap A$ は X の閉集合である．同様に $H^{-1}(F) \cap B$ は X の閉集合である．ここで $H^{-1}(F) = (H^{-1}(F) \cap A) \cup (H^{-1}(F) \cap B)$ であるので $H^{-1}(F)$ は X の閉集合である．

演習問題２７．$\ell \cdot \ell^{-1} \simeq \tilde{p}$ を確かめよ．

解答．定義通りホモトピーを作ればよい．$H : I \times I \to X$ を $H(t,s) = \begin{cases} \ell(2t) & (0 \le t \le \frac{1-s}{2}) \\ \ell(1-s) & (\frac{1-s}{2} \le t \le \frac{1+s}{2}) \\ \ell(2-2t) & (\frac{1+s}{2} \le t \le 1) \end{cases}$ と定義すると，演習問題２６より H は連続である．

また $H(t,0) = \begin{cases} \ell(2t) & (0 \le t \le \frac{1}{2}) \\ \ell(2-2t) & (\frac{1}{2} \le t \le 1) \end{cases} = \ell \cdot \ell^{-1}$, $H(t,1) = \ell(0) = p$, $H(0,s) = \ell(0) = p$, $H(1,s) = \ell(0) = p$，であるから $\ell \cdot \ell^{-1} \simeq \tilde{p}$

演習問題２８．$\ell \cdot \tilde{p_0} \simeq \ell$ を確かめよ．

解答．これもホモトピーを作ればよい．$H' : I \times I \to X$ を $H(t,s) = \begin{cases} \ell(\frac{2t}{1+s}) & (0 \le t \le \frac{1+s}{2}) \\ p_0 & (\frac{1+s}{2} \le t \le 1) \end{cases}$ と定義すると，演習問題２６から H' は連続である．$H'(t,0) = \begin{cases} \ell(2t) & (0 \le t \le \frac{1}{2}) \\ p_0 & (\frac{1}{2} \le t \le 1) \end{cases} = \ell \cdot \tilde{p_0}$, $H'(t,1) = \ell(t)$, $H'(0,s) = \ell(0) = p_0$, $H'(1,s) = p_0$ であるから $\ell \cdot \tilde{p_0} \simeq \ell$.

問．(∗) を示せ

レポートなどに書いてくれたら添削いたします.