幾何学２ (トポロジー入門)(2003 年度前期)

担当教官　石川　剛郎 (いしかわ　ごうお，北海道大学理学研究科)

演習問題解答例 (略解)

演習問題１８．正方形 $I^2 = I \times I,\ (I = [0,1])$ の２辺を貼り合わせてメビウスの帯を作る操作を考察せよ．

解答．張り合わせの定義通り考察すればよい．今 $I^2 = I \times I$ に対して $\varphi : I \times \{0\} \to I \times \{1\}$ を $\varphi(t,0) = (1-t,1)$ と定義すると，逆写像 $\varphi^{-1} : I \times \{1\} \to I \times \{0\}$ が $\varphi^{-1}(s,1) = (1-s,0)$ であるので，これは同相写像であり，この φ を使い，I^2 上の同値関係 $\sim$ を「$p \sim q \Longleftrightarrow p = q$, または, $p \in I \times \{0\}$ であって $q = \varphi(p)$, または，$p \in I \times \{1\}$ であって $q = \varphi^{-1}(p)$」と定めた時，メビウスの帯は $I^2/\sim$ である．

演習問題２４．$\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}^2$ は同相でないことを示せ．

解答．前問 23 や授業中のヒントを使えばよい．はじめに次のことを示す．位相空間 X, Y が同相であるとするこの時，X が弧状連結ならば Y も弧状連結である．(即ち，弧状連結は位相不変である性質.) $f : X \to Y$ が同相写像とする．$Y \in \forall y, y'$ に対して f が同相であるので $\exists x, x'$ s.t. $f(x) = y,\ f(x') = y'$．今，X は弧状連結であるので $\exists \ell : I \to X$: 連続写像 s.t. $\ell(0) = x, \ell(1) = x'$ である．ここで $f \circ \ell : I \to Y$ を考えればこれは y と y' を結ぶ道である．$(f \circ \ell(0) = y,\ f \circ \ell(1) = y',\ f \circ \ell$: 連続写像)

次に $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$: 同相写像があったとする．この時 $f|_{\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}} : \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbf{R} \setminus \{f(0)\}$ も同相写像である．(全単射は明らかであり，連続も相対位相の定義から確かめられる．) ここで $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ は弧状連結 (図を描けば明らかだが，きちんと示せる．) であり，$\mathbf{R} \setminus \{f(0)\}$ は弧状連結でない．(例えば，$f(0)-1, f(0)+1$ に対する道は存在しない．存在したとすると中間値の定理より矛盾が生まれる．) 以上で，先程のことを使うと同相写像で写りあっているのに，一方は弧状連結，もう一方は弧状連結でないのでこれは矛盾する．よって $\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}^2$ は同相ではない．

演習問題２５．ホモトープという関係は同値関係である：

• $\ell \simeq \ell$, • $\ell \simeq \ell' \Rightarrow \ell' \simeq \ell$, • $(\ell \simeq \ell', \ell' \simeq \ell'') \Rightarrow \ell \simeq \ell''$

解答．• $H : I \times I \to X$ を $H(t,s) = \ell(t)$ とすると，H は連続である．これが ℓ から ℓ へのホモトピーの条件を満たすことは明らか．$(H(t,0) = \ell(t),\ H(t,1) = \ell(t)\ (\forall t \in I),\ H(0,s) = \ell(0) = p,\ H(1,s) = \ell(1) = q\ (\forall s \in I).)$

• $H : I \times I \to X$ を ℓ から ℓ' へのホモトピーとする．この時，$H' : I \times I \to X$ を $H'(t,s) = H(t,1-s)$ と置くと $I \times I \to I \times I$; $(t,s) \to (t,1-s)$ は連続で H も連続なので H' も連続写像である．さらに $H'(t,0) = H(t,1) = \ell'(t),\ H'(t,1) = H(t,0) = \ell(t)\ (\forall t \in I),\ H'(0,s) = H(0,1-s) = p,\ H'(1,s) = H(1,1-s) = q\ (\forall s \in I)$ であるから, これは $\ell' \simeq \ell$ を与える．

• $H, H' : I \times I \to X$ をそれぞれ ℓ から ℓ', ℓ' から ℓ'' へのホモトピーとする．この時, $H'' : I \times I \to X$ を $H''(t,s) = \begin{cases} H(t,2s) & (0 \le s \le \frac{1}{2}) \\ H'(t,2s-1) & (\frac{1}{2} \le s \le 1) \end{cases}$ と定義するとこの写像は連続になる．

(それぞれが連続で，閉集合でつなぎめがつながっているので．参照 演習問題２６) すると $H''(t,0) = H(t,0) = \ell(t),\ H''(t,1) = H'(t,1) = \ell''(t)\ (\forall t \in I)$,

$H''(0,s) = \begin{cases} H(0,2s) = p & (0 \le s \le \frac{1}{2}) \\ H'(0,2s-1) = p & (\frac{1}{2} \le s \le 1) \end{cases}$, $H''(1,s) = \begin{cases} H(1,2s) = q & (0 \le s \le \frac{1}{2}) \\ H'(1,2s-1) = q & (\frac{1}{2} \le s \le 1) \end{cases}$

であるから，$H''(0,s) = p,\ H''(1,s) = q\ (\forall s \in I)$ よって $\ell \simeq \ell''$ である．