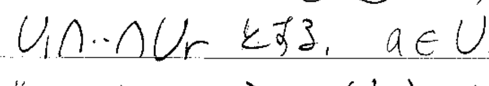
幾何学2(2003, 石川)の演習問題の解答例(略解)

$\boxed{1}$ 略 $\boxed{2}$ $\mathring{D}^1=(-1,1)$. $f:\mathring{D}^1\to\mathbb{R}$ を $f(x)=\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ で def. fは全単射連続 $g:\mathbb{R}\to\mathring{D}^1$, $g(y)=\frac{2}{\pi}\arctan y$ は fの逆写像であり連続. 従って fは同相写像. 従って $\mathring{D}^1$ と $\mathbb{R}$は同相 / $f:\mathring{D}^2\to\mathbb{R}^2$ を $f(x)=\tan\left(\frac{\pi\|x\|}{2}\right)\frac{x}{\|x\|}$ $(x\neq 0)$, $f(0)=0$ で定める. fは全単射連続 $g(y)=\frac{2}{\pi}\arctan(\|y\|)\frac{y}{\|y\|}$ $(x\neq 0)$, $g(0)=0$で定める. gは fの逆写像であり. gは連続. 従って fは同相写像. 従って $\mathring{D}^2$ と $\mathbb{R}^2$は同相 / $\mathring{D}^n$ と $\mathbb{R}^n$の間の同相写像も同様に構成できる. / もちろん同相写像は一通りではない. いろいろな正解がある / $\boxed{3}$ $f:D^1\to I$ を $f(t)=\frac{1}{2}(t+1)$ で def. fは全単射連続. $g:I\to D^1$ を $g(s)=2s-1$ で def. gは fの逆写像であり, gは連続 従って fは同相写像 従って D^1と Iは同相 / $\tilde{I}^2=\{(x,y)\in\mathbb{R}\mid -\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\leqq y\leqq\frac{1}{2}\}$ と D^2の間の同相写像を作る $\tilde{I}^2$ の境界上の点 $x=(x,y)$ に対し $0=(0,0)$ から x へのびる半直線の S^1 との交点を $f(x)$ とおく. $\tilde{I}^2\ni x\neq 0$ に対しては, 0 から x へのびる半直線の $\tilde{I}^2$の境界の交点を x' としたとき $f(x)=\frac{\|x\|}{\|x'\|}f(x')$ とおく. (とくに $\|f(x)\|:\|f(x')\|=\|x\|:\|x'\|$である) さらに $f(0)=0$ とおく. こうして写像 $f:\tilde{I}^2\to D^2$ が定まる. このとき fは全単射連続である. $g:D^2\to\tilde{I}^2$ を $S^1\ni y$ に対しては 0とxを結ぶ線分の $\tilde{I}^2$の境界との交点を $g(y)$と定め, $D^2\ni y\neq 0$ に対しては, $g(y)=\frac{\|y\|}{\|y'\|}g(y')$, (ただし y'は 0から yへのびる半直線の S^1との交点) とおき, $g(0)=0$ と定める. すると gは fの逆写像であり, gは連続である. 従って fは同相写像である. いま $T:I^2\to\tilde{I}^2$ を $T(x,y)=(x-\frac{1}{2},\ y-\frac{1}{2})$ で定めると Tは同相写像である. 従って $f\circ T:I^2\to D^2$ は同相写像である. 従って I^2とD^2は同相である / もちろん同相写像は一通りではない, いろいろな正解がある / $\boxed{4}$  / $\boxed{5}$ $U_1,\dots,U_r$ が $\mathbb{R}^n$の開集合とする. $a\in U_1\cap\cdots\cap U_r$ とする. $a\in U_i$ $(1\leqq i\leqq r)$ なので $\exists\varepsilon_i>0$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $(\|x-a\|<\varepsilon_i\Rightarrow x\in U_i)$ が成立. $\varepsilon:=\min\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r\}$ とおくと $\varepsilon>0$ であり, $\forall i$ $(1\leqq i\leqq r)$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$ $(\|x-a\|<\varepsilon\Rightarrow x\in U_i)$ が成立. よって $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $(\|x-a\|<\varepsilon\Rightarrow$

$a \in U_1 \cap \cdots \cap U_r$) が成立. 従って $U_1 \cap \cdots \cap U_r$ は条件をみたすので $\mathbb{R}^n$ の開集合 / $U_\lambda\ (\lambda \in \Lambda)$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合の族とし, $a \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ とする. $\exists \lambda \in \Lambda,\ a \in U_\lambda$ なので, U_λ のみたす条件より, $\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ $(\|x-a\| < \varepsilon \Rightarrow x \in U_\lambda)$ が成立. $U_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ なので $\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n (\|x-a\| < \varepsilon \Rightarrow x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda)$ が成立. よって $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合 / ϕ は条件をみたすので $\mathbb{R}^n$ の開集合. $\mathbb{R}^n$ は $\forall x \in \mathbb{R}^n$ に対し 結論の $x \in \mathbb{R}^n$ はつねに成立するので, やはり $\mathbb{R}^n$ の開集合 / 以上より開集合系の条件はすべて満たされる / 一般の距離空間でも位相が同じやり方で定まる / $\boxed{6}$ $a \in \mathring{D}^n$ とする. $\|a\| < 1$ なので $\varepsilon := 1 - \|a\|$ とおくと $\varepsilon > 0$ であり, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ について, $\|x - a\| < \varepsilon$ ならば $\|x\| = \|x - a + a\| \leqq \|x - a\| + \|a\| < 1 - \|a\| + \|a\| = 1$ だから $\|x\| < 1$ つまり $x \in \mathring{D}^n$ となるので $(\|x-a\| < \varepsilon \Rightarrow x \in \mathring{D}^n)$ が成立. よって $\mathring{D}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合 / $\boxed{7}$ $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であることを示すには, 補集合 $\mathbb{R}^n \setminus S^{n-1}$ が開集合であることを示せばよい. $\mathbb{R}^n \setminus S^{n-1} = \mathring{D}^n \cup U$ と書される. ただし $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 1 < \|x\|\}$. $\mathring{D}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることはOK. / そこで U が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示す. $a \in U$ とする. $1 < \|a\|$ なので $\varepsilon := \|a\| - 1$ とおくと $\varepsilon > 0$ であり, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ について, $\|x - a\| < \varepsilon$ ならば $\|x\| = \|a + x - a\| \geqq \|a\| - \|x - a\| > \|a\| - (\|a\| - 1) = 1$ だから $\|x\| > 1$ つまり $x \in U$ となるので $(\|x - a\| < \varepsilon \Rightarrow x \in U)$ が成立. よって U は $\mathbb{R}^n$ の開集合 / 従って $\mathbb{R}^n \setminus S^{n-1} = \mathring{D}^n \cup U$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合 / これもいろいろな解答がありうる. たとえば $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \|x\|$ で定め, f が連続関数であり, $S^{n-1} = f^{-1}(\{1\})$ であることに注目する方法でもよい / 適切な説明がのべられていて論理的に筋道が通り, 無関係なことが一切書かれていないレポートがよいレポート / $\boxed{8}$ A君は正しくない / たとえば $X = [0, 1) \subset \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ の開集合でないが, 閉集合でもない. / これで正解だが, 補足説明をすると, ϕ や $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合でもあり閉集合でもある. 開と閉は「対義語」ではない. 要注意. / たとえ話をすると, 開集合という

のは「すべての窓が開いている部屋」であり，閉集合というのは
「すべての窓が閉じている部屋」にたとえられる．窓がすべては開い
ていないということは閉じている窓が少なくとも1つあるということ
であり，すべての窓が閉じていることにはならない．窓のない部屋
は開かつ閉である．（あくまでこれはたとえ話ですが）．$\boxed{9}$
$V_1,\dots,V_r$ が A の開集合とする．$V_i=U_i\cap A$ となる $\mathbb{R}^n$ の開集合
U_i がある．$(1\leqq i\leqq r)$．$V_1\cap\cdots\cap V_r=(U_1\cap A)\cap\cdots\cap(U_r\cap A)$
$=(U_1\cap\cdots\cap U_r)\cap A$ であり，$U_1\cap\cdots\cap U_r$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合
なので $V_1\cap\cdots\cap V_r$ は A の開集合／V_λ $(\lambda\in\Lambda)$ が A の開集合と
する．$V_\lambda=U_\lambda\cap A$ $(U_\lambda\in\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n})$ と表される．$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda\cap A)$
$=(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda)\cap A$ であり，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\in\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ なので $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$ は $\mathbb{R}^n$
の開集合／$\emptyset=\emptyset\cap A$，$A=\mathbb{R}^n\cap A$ であり，$\emptyset,\mathbb{R}^n\in\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ なので
$\emptyset, A\in\mathcal{O}_A$／$\boxed{10}$ は 9 と同様なので略／ところで「カメレオンの色
は何色ですか？」えっ？カメレオン色!? 正解は"カメレオンのいる場所
による"です．開集合といってもその集合をどこで考えているか
明示しないと意味がはっきりしない．必ず $\mathbb{R}^n$ の開集合というふうに
〜の開集合，××の開集合と書くこと／$\boxed{11}$ $U_1,\dots,U_r\in\mathcal{O}_Z$
とする．$\pi^{-1}(U_1),\dots,\pi^{-1}(U_r)\in\mathcal{O}_X$ なので $\pi^{-1}(U_1)\cap\cdots\cap\pi^{-1}(U_r)$
$=\pi^{-1}(U_1\cap\cdots\cap U_r)\in\mathcal{O}_X$ よって $U_1\cap\cdots\cap U_r\in\mathcal{O}_Z$／$U_\lambda\in\mathcal{O}_Z$
$(\lambda\in\Lambda)$ とする．$\pi^{-1}(U_\lambda)\in\mathcal{O}_X$ なので $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\pi^{-1}(U_\lambda)\in\mathcal{O}_X$
$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\pi^{-1}(U_\lambda)=\pi^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda)$ より $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\in\mathcal{O}_Z$ ／$\pi^{-1}(\emptyset)=\emptyset$
$\in\mathcal{O}_X$ なので $\emptyset\in\mathcal{O}_Z$，$\pi^{-1}(Z)=X\in\mathcal{O}_X$ なので $Z\in\mathcal{O}_Z$／
$\boxed{12}$ U を Z の開集合とする．$\pi^{-1}(U)$ は X の開集合である．従って
π は連続写像／$\boxed{13}$ $f(X)\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ を $f(X)$ の（Yでの）
開被覆とする．このとき $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(U_\lambda)$ であり，$f^{-1}(U_\lambda)$
は X の開集合．X はコンパクトなので，$\exists U_{\lambda_1},\dots,U_{\lambda_r}$；
$X=\bigcup_{i=1}^{r}f^{-1}(U_{\lambda_i})$ このとき $f(X)\subseteq\bigcup_{i=1}^{r}U_{\lambda_i}$ が成り立つ
ので $f(X)$ は compact／$\boxed{14}$ $\pi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を商写像とし
$f=\pi|I : I\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を考えると，f は連続で全射．I は
compact なので．$f(I)=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ も compact／．$\boxed{15}$ $x,x'\in\mathbb{R}$

$x \sim x'$ とすると $x - x' \in \mathbb{Z}$，このとき $e(x) = e(x')$ よって $\bar{e}: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ は well-defined／全単射性は容易／$V \subset S^1$ を S^1 の開集合とすると，e は連続なので $e^{-1}(V)$ は $\mathbb{R}$ の開集合，ところが $e^{-1}(V) = \pi^{-1}(\bar{e}^{-1}(V))$ （$\pi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/S^1$ は商写像）よって $\bar{e}^{-1}(V)$ は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の開集合，よって $\bar{e}$ は連続／$\boxed{16}$ $X \setminus A$ が X の開集合であることを示す，$\forall x_0 \in X \setminus A$ とする，$x_0 \notin A$ なので各 $a \in A$ について $a \neq x_0$，X は Hausdorff なので，$\exists U_a, V_a$（それぞれ a, x_0 を含む X の開集合），$U_a \cap V_a = \phi$，すると $A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a$ は X における A の開被覆　A は compact なので $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}$ となる，そこで $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$ を考えると X の開集合の有限個の共通部分なので，V は X の開集合であり x_0 を含む．$\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}\right) \cap V = \bigcup_{i=1}^{n} (U_{a_i} \cap V) = \phi$ なので $x_0 \in V \subseteq X \setminus A$ である，従って $X \setminus A$ は X の開集合の和集合として表される，よって $X \setminus A$ は X の開集合／よって A は X の閉集合／