

幾何学 2 (トポロジー入門) 質問に対する回答

No. 9 (2003年6月24日) の分 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

問. 同相 (\approx, \cong) とホモトピー同値 (\simeq) の違いがよくわかりません. // ホモトピー同値は同相より「弱い」同値関係の定義だという事がわかりました. これはつまり, ある図形とホモトピー同値な図形全体の中に, 同相な図形全体が含まれていると言えるのでしょうか?

答. おはようございます. すでにお知らせしたように, 7月15日(火)に幾何学2のテストをします. 持ち込み不可で, 論述形式です. "基本的"な問題だけを出題する予定なので, 基本的な問題(演習問題)がすべて解けるように準備しておいてください. さて, 回答ですが, その通りです. そして大事なものは, 基本群が位相不変量であるばかりでなく, より弱いホモトピー同値について不変であるということです. 基本群はホモトピー不変量であるということです.

問. f と g がホモトープであるとは具体的にどういうことですか? // 連続写像のホモトピーについてよくわかりません. f から g への連続変形を与えると解釈すればよいのでしょうか?

答. そうです. 連続変形です.

問. ホモトープの定義に従って, $f, g: X \rightarrow Y$ 連続, $t \in [0, 1]$ で, 例えば, $H(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x)$ とおけば, $H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = g(x)$ となるので, どのような f, g に対しても, f と g がホモトープとなってしまう, これではあまり意味をなさない気がするのですが.

答. 着眼点は良いです. $Y = \mathbb{R}^n$ であればその通りです. 「任意の連続写像 $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ はホモトープである」ということは成り立ちます. ただし, $Y = \mathbb{R}^n$ でないと, 質問にある $H(x, t)$ の定義式が意味を持ちません. (t 倍とか + とか言っても, 一般の位相空間上では意味がない). したがって, 残念ながら一般には通用しない推論です. たとえば, $f, g: S^1 \rightarrow S^1$ を $f(z) = z$ (つまり恒等写像), $g(z) = 1 \in S^1 \subset \mathbb{C}$ (つまり定値写像) とおくと, f と g はホモトープではありません. このように, ホモトープであったり, なかったりするので, ホモトープという概念には意味があります.

問. 写像のホモトープという同値関係で, 集合 $S := \{f: X \rightarrow Y \mid f \text{ 連続}\}$ の商集合 S/\simeq を考えると, これは何か位相空間を分類する性質がありますか? X と Y の間の何らかの関係を導けませんか? (A)

答. なるほど. よい質問ですね. 導くことができます. いろいろ知られていますが, 一番極端な場合, つまり, X が1点からなる位相空間のとき (Y は一般) を考えてみましょう. このとき, 商集合 S/\simeq は何でしょう? えっ? 1点からの写像を連続的に動かして行って, 別の写像に移すことができる, というのがホモトープということだから, Y の2点 y, y' について, $y \sim y' \stackrel{\text{def}}{\iff} y$ と y' を結ぶ道があるということ, と定義したときの同値類の集合が S/\simeq だ. だから, S/\simeq は「弧状連結成分の集合」だ... そう, その通り! ですから, X が1点の場合は, 位相空間を弧状連結成分の個数によって分類することになります. では, $X = S^1$ とすると...?

問. 「 (X, p_0) と (Y, q_0) が同相 $\Rightarrow \pi_1(X, p_0) \cong \pi_1(Y, q_0)$ 」ということでしたが, $\pi_1(X, p_0)$ と $\pi_1(Y, q_0)$ が群同型というのは, ある同型写像 $\varphi: \pi_1(X, p_0) \rightarrow \pi_1(Y, q_0)$ が存在するということだったと思います. この φ は $f: X \rightarrow Y$ から導かれる $f_\#$ のことなのですか? (A)

答. その通りです. $f_\#: \pi_1(X, p_0) \rightarrow \pi_1(Y, q_0)$ が群の同型写像になることが証明されます. 証明してください.

問. 基本群の位相不変性で, X での基点 p_0 が Y での基点 q_0 にちゃんと移らなければいけないのはなぜですか?

答. 「移れば大丈夫」ということなので, あくまで十分条件です! 「移らなければいけない」という必要条件ではありません. たとえば, X と Y を両方とも S^1 とそれから離れた1点 q_0 からなる位相空間とし, S^1 の1点 p_0 について, X の基点を p_0 と定め, Y の基点は q_0 と定めます. このとき, 恒等写像 $f: X \rightarrow Y$ は同相写像ですが, $\pi_1(X, p_0) \cong \mathbb{Z}$ で, $\pi_1(Y, q_0) \cong \{e\}$ で基本群は同型になりません. 「基点を写す同相写像がある \Rightarrow その基点に関する基本群が同型」ということです. ただし, 位相空間が弧状連結のときは, 次の回答で解説するように, 基本群の同型類が基点の取り方によらないので, 「弧状連結空間の間に同相写像がある \Rightarrow (どの基点に関しても) 基本群が同型」ということが成り立ちます.

問. 同型写像 $\varphi: \pi_1(X, p_0) \rightarrow \pi_1(Y, p_1)$ が $\varphi([\ell]) := [(m^{-1} \cdot \ell) \cdot m]$ により定まるとありますが, $(m^{-1} \cdot \ell) \cdot m$ というものはどういうものですか?

答. ここでは, m は点 p_0 から点 p_1 へ道, つまり, 閉じた道ではありません. m^{-1} は点 p_1 から点 p_0 へ道, ℓ は点 p_0 から点 p_0 へ道なので, $m^{-1} \cdot \ell$ は, p_1 から点 p_0 へ道です. m は点 p_0 から点 p_1 へ道なので, $(m^{-1} \cdot \ell) \cdot m$ は, p_1 から点 p_1 へ道です. つまり p_1 を基点とする閉じた道です. だから, $[(m^{-1} \cdot \ell) \cdot m] \in \pi_1(Y, p_1)$ となるわけです. このように「地道に」考えていけばわかります.

問. $\pi_1(X, p_0) \times \pi_1(Y, q_0) \rightarrow \pi_1(X \times Y, (p_0, q_0))$ を $([\ell], [m]) \mapsto [(\ell, m)]$ で定まるという説明でしたが, そもそも $[(\ell, m)]$ というのは, $n: I \rightarrow X \times Y, n \in \text{Omega}(X \times Y, (p_0, q_0))$ を $t \mapsto n(t) = (\ell(t), m(t))$ とおいたときに, $[n] = [(\ell, m)]$ となるということですね? (A)

答. その通りです. よくわかっていますね. $n = (\ell, m)$ です. 一般に, 写像 $f: X \rightarrow Y, g: X \rightarrow Z$ に対して, $(f, g): X \rightarrow Y \times Z$ を $(f, g)(x) := (f(x), g(x))$ で定めるのは現代のスタンダードな書式と言えます.

問. $\pi_1(S^1, p_0) \cong \mathbb{Z}$ の(厳密とは言えないかも知れませんが)考え方として, p_0 を基点として何周するか, 時計回りが反時計回りかが符号と考えていいですか? また, トーラスの基本群 $\pi_1(S^1 \times S^1, (p_0, q_0)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ については, $S^1 \times \{q_0\}$ の方向か, $\{p_0\} \times S^1$ の方向かで, 第一成分, 第二成分が決まると考えていいですか? (A)

答. その通りです. (質問にはトーラスの図が書いてありました). ものごとを大枠でまず捉えて, それから細かくつめていく, というのが理解の鉄則ですね. 「厳密とは言えないかも知れませんが」と書くことができる, ということは, 良く理解している証拠です.

問. $\pi_1(S^1, p_0) \cong \mathbb{Z}$ をどうやって示したらいいのかわかりません.

答．よくぞ尋ねてくれました．だいたいの感じは、直前の質問にある通りで、詳しい厳密な証明については、講義プリントのト7~ト8の第8節の中で非常に丁寧に解説しました．ぜひ読んでください！

問． $[\ell], [f \circ \ell]$ とは何ですか？

答．道のホモトープ類です．ここで、 $\ell: I \rightarrow X$ で、 $f: X \rightarrow Y$ のとき、 $f \circ \ell: I \rightarrow Y$ であることに注意しましょう．

問．なぜ基本群の記号を π_1 と書くのですか？// 基本群の記号 π_1 の π と 1 の由来は何ですか？

答．知りません． I ではなくて、 I^n で同様の群を考えたものが、 π_n (n 次ホモトピー群) なので、 $n=1$ である理由は明確ですが、 π を使う理由は知りません．誰が最初に使い始めたんだろう...

問．位相空間の直積 $(X \times Y, \mathcal{O}_{X \times Y})$ について、授業では、 $U \in \mathcal{O}_{X \times Y}$ のとき、 U は直方体のようなものというイメージを受けたのですが、// 直積空間で、 $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{X \times Y}$ はいつでも成り立つのですか？

答．誤解があるようです．成立しません． $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \neq \mathcal{O}_{X \times Y}$ です．定義をもう一度よく読み直してください．イメージとしては「境界を含まない直方体をいくつか(無限個でもよい)合わせてできる集合」が直積空間の開集合です．通常の $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ での開集合のイメージと同じです．

問．位相同形 (\approx, \cong) と同型 \cong と違いは何ですか？

答．講義で、同相にも \approx を使うとってしまったのですが、実際、そうなのですが、この講義では、群の同型も出てきて、そちらに \cong の記号を使うので、プリントでは、同相は \approx を使っています．とにかく、「これは位相空間か、これは群か」と、常に意識して区別してください．区別してください．ところで、「位相群」という、位相と群が合体したおもしろい概念もありますね．

問．基点を止めてホモトープがよくわかりません．具体例がほしいです．

答．すでに説明した「閉じた道のホモトピー」が具体例です．

問．「止めている」とはどういうことですか？// 「 A で停留する」は、 A の上では変形のパラメータに関係ないということなので、 A の上では留められているというイメージでよいですか？

答．よいです．「止めている」も「停留する」も同じ意味で使っています．

問．不動点に関して、 $\text{id}_{D^2}: D^2 \rightarrow D^2$ について、不動点集合の濃度は \aleph ですが、連続写像 $f: D^2 \rightarrow D^2$ であって、不動点集合 $\{x \in D^2 \mid f(x) = x\}$ の濃度が可算無限 \aleph_0 になるものや、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、不動点集合が n 個の点からなるような連続写像 $f_n: D^2 \rightarrow D^2$ を作ることはできますか？(A)

答．良い質問ですね．できます．たとえば「ベクトル場」を積分して同相写像を作れば、「不動点」とベクトルの「特異点」が対応するので、与えられた不動点集合を持つ例を作り易いと思います．自分で少し考えてみると、よい勉強になると思います．

問．位相幾何学は無限次元とも戦えますか？今、トポロジーの講義を受けていて、根本的に \mathbb{R}^n の範囲内でのイメージで考えています．が、位相空間として、無限次元ベクトル空間があります．位相幾何学として学ぶことは、このような対象にもそのまま使えますか？バナッハ空間やヒルベルト空間を貼り合せたものを考えるとどうなりますか？うまくいかないこともたまには考えてください．(A)

答．良い質問ですね．戦えるし、戦っています．具体的なイメージと離れても「論理」や「一般化」「抽象化」という強力な武器で戦えるのが数学のよいところです．論理的に適用可能ならばそのまま使えます．質問にあるような「バナッハ多様体」や「ヒルベルト多様体」の概念はすでにあります．そのような対象に対して位相幾何学の研究があります．それはともかく、以下は私見ですが、人間が本当に理解できるのは、所詮有限次元だけではないか．ヒルベルト空間などの無限次元空間を考えることができ、いろいろ解析できるのはすばらしいことだが、本当に深い結果が得られるのは、本質的に有限次元の幾何学からだけではないか、本当におもしろいことが見つかるのは、無限次元から有限次元を取り出した後なのではないか、という確信めいたものを最近ひしひしと感じています．ということで、いままでの研究を超えたところで、不肖、私(石川)もがんばっています．「まだうまくいっていない」ですが、「まだうまくいっていないから」現在も考え続けているところです．講義では、うまくいくことしか話しませんが、たとえば、私(石川)の部屋(4-505)を訪ねてくれると、うまくいかない話をいやというほど教えてあげることができます．

問． G/H がわかりません．そもそも商集合がわかりません．

答．そう(しょう)ですか．でも大丈夫．まず「同値関係」を復習してください．どうして(どうして)同値関係を考えるかという、同値関係で「組み分け」ができるからです．そのときの「組の集まり」が商集合です．たとえば、ある学校に、1組、2組、... と全部で12クラスあったとき、生徒1人1人の集合ではなくて、 $\{1, 2, \dots, 12\}$ を商集合と言います．商集合は、そのクラスに属する生徒たちを代表します．クラスの全員を背負って立つ「背負う(しょう)集合」というわけです．失礼しました．

問．well-defined とはどんなものですか？示し方がよくわかりません．// 今さらなのですが、well-defined を示すことの意味がよく理解できませんでした．また、どのような場合に、well-defined を示さなければならないのですか？他の分野にも使える、より一般的な回答をお願いします．

答．「商集合を定義域とする写像を定める」という場合に「well-defined(= ちゃんと定義されている)」か否かを問題にします．他の分野でもそうです．たとえば、皆さんのクラスで大学祭での出し物の意見を決めたいときに、 A 君は「やきとりがいい」と言い、 B 君は「わたあめがいい」と言い、 C さんは「クレープがいい」という具合にバラバラだと、これは well-defined でない、というわけです．さて、写像 $f: X/\sim \rightarrow Y$ を定義したいとします．写像なので、 X/\sim の各要素に対して、 Y の要素を1つ定めなければなりません．つまり、 X 上の与えられた同値関係 \sim についての各組に対して、 Y の要素が1つに決められなければダメです．同じ組に属するのに、 Y の異なる要素が定められちゃったら、その定め方は、 X/\sim からの写像でないので、well-defined ではない、同じ組に属する(つまり同値)であれば、 Y の同じ要素が定まっている．これなら well-defined である、というわけです．ではまた．