

## 幾何学 2 (トポロジー入門) 質問に対する回答

No. 7 (2003年6月10日) の分 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ 剛郎)

問. ホモトープは,  $X$  上の道全体の集合に対しての関係ですか? 始点と終点と同じ道全体とは仮定しなくてもよいのでしょうか? (A)

答. おはようございます. さて回答ですが, 良い質問ですね. 仮定します. 始点と終点と同じ道に対してだけ, ホモトープという同値関係が定義されます. 今後は, 主に, 1点(基点)を決めて, その点から出発して, その点に戻ってくる閉じた道全体にホモトープという同値関係を考えます.

問. 「道」が群の構造を持っているということですか?

答. 違います! 「閉じた道のホモトープ類の集合」が群の構造を持っているということです. (プリント, ト4の4.4). それはともかく, 「構造」という言葉を使えるのは, 数学が上達した証拠ですね.

問. 代数における群論はイメージしやすく理解できるのですが, 位相幾何における群があまりわかりません. // 今日の講義で学んだ準同型や同型は代数学で学んだものと全く同じものとして考えてよいのですか?

答. 同じものです. 安心してください. 同じものですが, その「群」というものをこれから応用しようとしています. 何でもそうですが, 応用できないと本当にわかったことにはならないので, 応用の仕方ぜひ理解してくださいね.

問. 閉じた道の  $\ell$  と  $\ell^{-1}$  は違うものですか?

答. 違うものです. たしかに図を書くと, 同じように見えます. でも, 「道」というものは, とにかく何らかの写像  $\ell: I \rightarrow X$  として定義されていた(4.1)ので, 写像として異なれば, 違うものです. 同じ「軌跡」であっても, 進み方も考慮して, 区別しているわけです. とここで, 皆さんの知識がしっかり定着するように, 「写像が同じ」とはどういうことか, を復習しておきます! 2つの写像  $\ell, \ell': I \rightarrow X$  が同じである  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall t \in I, \ell(t) = \ell'(t)$  です.

問. 制限とは何ですか?

答. 写像の定義域 (source) を制限することです. 皆さんの知識がしっかり定着するように, 「写像」について復習しておきます. 写像には定義域と値域 (target) が必ず定まっていたことを思い出しましょう. 記号で,  $f: X \rightarrow Y$  と書くとき,  $X$  が定義域で,  $Y$  が値域でした. 定義域や値域が変われば, たとえ同じ式で決められた写像でも, 違うものです. さて, 部分集合  $A \subseteq X$  について, 写像  $f: X \rightarrow Y$  の制限とは, 任意の  $x \in A$  に対して,  $f|_A(x) = f(x)$  という具合に ( $f$  と同じ式で) 定めた写像  $f|_A: A \rightarrow Y$  のことです.

問. 同相写像の方が同型写像よりも条件が強いものと考えてよいのですか?

答. 言葉を補う必要があります! 位相空間  $X$  と  $Y$  が同相ならば, それぞれの基本群は (適切に基点を選べば) 群として同型になる. 逆は一般には成立しない! ということです.

問. 位相空間が同相ならばその基本群が同型である, というので, 対偶: 基本群が同型でない  $\Rightarrow$  もとの空間が同相でない, が成立します. これについて, 次のような例え話を用意していることは, もう見破られています: すすきので警察官仲間が飲んでいる. その中に, たまたま出張で札幌に来ていた千葉県警の男がいる. その男は, 道警でないで同窓でない——

答. なるほど! こうすると「同型でないで同相でない」ということが強く記憶に残って良いですね. 私 (石川) はこのネタは用意していませんでした. でも, 触発されて, いま考えました: 「さあどうぞどうぞ (同相). えっ? わたし (輪 =  $S^1$ ) と同窓ですか? じゃあ, ずっと ( $\mathbb{Z}$  と) 道警ですね. 札幌市ですか? ほう, 基本的に郡 (基本群) の方ですか. これは同慶の至りですな, ははは」という時事 (じじい) ネタです.

問. 群の例で,  $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  となっていますが, 始めの方で聞いた定義は,  $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$  でした. この定義では駄目なのでしょうか?

答. 駄目ではないですが,  $\mathbb{R}^2$  の内積の話などではなく,  $\mathbb{C}$  の積の方を考えていると強調したいのです.

問. 複素数の場合, 単位元は 1 となっているのですが,  $i$  は単位元にならないのでしょうか?

答. なりません. 単位元の条件  $\forall g \in G, ge = g = eg$  を思い出しましょう.  $i$  倍すると, 複素数は変化してしまいますね. だから,  $i$  は単位元ではありません.

問. 群は, 同じ集合に対しても, どのような演算を定義するかによって違ったものになるのですか?

答. その通りです. 位相空間でも事情は同じでしたね.

問.  $G$  と  $H$  が同型だとわかると, そこからどのようなことが考察できるのですか?  $G$  と  $H$  はなにか似たような構造を持つというようなイメージを持っていれば良いのでしょうか?

答. 群として, まったく同じ構造を持ちます. とここで, 「構造」という言葉が使えるということは, 数学を理解し (始め) ていると自信を持ってよいです.

問.  $G = \mathbb{Z}$  のときの単位元は 1 と聞いたのですが, 本当なののでしょうか?

答. 本当です.  $\mathbb{Z}$  の「積」は, 足し算なので,  $g \in \mathbb{Z}$  の「 $n$ 乗」は,  $g + \dots + g$  ( $n$ 回), つまり,  $ng$  です.

問. 群を定義する演算は和も積もありますが, 群の2項演算自体を総称して「積」と呼ぶことがあるのはなぜですか?

答. 和を使うと, 群はいつも可換であると勘違いする人が出てくるからです.

問. 群の同型と同型写像と準同型写像の関連がよくわかりません. // 準同型の利用価値はなんですか? // もっと勉強を深めていくと分かるものなのでしょうか?

答．その通りです．それはともかく，同型写像に準ずるのが準同型写像なので，同型写像の条件よりも準同型写像の条件は弱くなります．同型写像はもちろん準同型写像の一種です．そして「同型」ということは，2通りに使います．同型写像の略語と，同型という同値関係の両方に使います．ところで，同型写像でないような準同型写像は，たとえば，調べたい群のいくつかの情報だけを取り出して調べるときによく使います．後で講義で説明するかもしれませんが，2つ以上の元で生成される自由群  $G$  が非可換であると定理を，全射準同型  $G \rightarrow GL(2, \mathbb{R})$  を構成して示すことができます．

問．群の積は，どのように定義されるのですか？1つ1つ覚えるものなのですか？それとも，なにがしかの理由があって定義されるものなののでしょうか？// 準同型はどのように決めるのですか？定義を満たす写像を地道に探すしか方法はないのですか？

答．数学も人間の活動なので，もちろん理由があって定義しています．理由や動機がないのに人間が何かをするということは考えられませんね．ですから，覚えるというより，どうしてこういう概念や構成が大切なのかを自分で納得するという方が大切です．理論を作るときの基礎的な例(サンプル)になるとか，使用頻度が高いとか，いろいろ考えた末にたどり着いたとか，歴史的な理由があるとか，事情は様々です．ところで，コンピュータは，理由がないのに覚えたり計算したりします．ご苦労なことです．でも，自分で群を定義したり，自分で写像を作るとはコンピュータにはできません．あくまで人間が群を定義したり，写像を作るわけです．このように「コンピュータは何ができないか」をよく考えて，なるべく，コンピュータにはできないようなことをするように普段から心掛くと良いと思います．たとえば，コンピュータは自分で駄洒落を作って，その場の雰囲気をもくしたり，寒くしたりはできません．というか，場とか雰囲気という高級な概念を理解できないでしょうね．それはともかく，コンピュータにはできないようなことをするという事は，いまの情報化社会を生き抜いていくための知恵(の一つ)であると私(石川)は思っています．

問． $H(t, s) = \cdots n \left( \frac{4t - 2 - s}{2 - s} \right) \cdots$  などの道のホモトピーは，どのように作られたのですか？

答．よく考えて作られました．まず，その与えられた  $H$  という写像がホモトピーになっているかどうか，定義に従って確認してください(10分程度)．次に，その与えられたホモトピーが，どのような連続変形になっているかを図を使って鑑賞してください(5分程度)．その後，そのような連続変形はどのような式で表されそうか，自分で空想してください(5分程度)．それから，もう一度， $H$  の式を見て，ああなるほど，と思ってください(5分程度)．とりあえずこれだけ(計30分以内)で良いです．例え話をすると，化学や生物の実験と同じで，それぞれの実験結果に対する追試・確認は必要だが，すべての実験一つ一つに対して，初めにその実験をのみ出した人と同じ立場に立つ必要はない(し，そんなことは不可能だし，時間もないし，無駄である)，ということです．

問．メビウスの帯のように貼り合わせで得られる位相空間の連続性の示し方がよくわかりません．

答．確かに，示しづらいですね．(コンピュータには無理)．そこで，商位相の定義(3.4)と連続写像の定義(プリントには無いが基本的．この講義でも2回程すでに説明済みです：「開集合の逆像が開集合」)を，ノートにもう一度書き下してから，その定義(言葉)を使って示してみてください．

問．同じ集合でも位相が異なれば異なる位相空間になりますが，それで保たれる性質，保たれない性質が出てくると思います．それにはどんなものがありますか？集合を固定したときに，その上の位相をいろいろかえたときに不変な性質はないのでしょうか？(A)

答．良い質問です．位相の入れ方に制限をつけるならば確かに保たれる性質があります．しかし，勝手な位相を入れても保たれる性質は，集合としての性質だけになります．つまり「濃度」だけです．

問．群の例を挙げるときに，積についての定義をして結合則について確認しなかったのはなぜですか？

答．そうですね，結合則が成り立つことは当たり前ではありません．本当は(結合則に限らず)群の条件を全部一つ一つ確認するべきです．でも，それをすべて講義でやっていると時間がかかって仕方がないので，省略しただけです．皆さん各自で御確認ください．

問．「結合法則だけが成立しない」という代物は今までにみたことがないのですが，どのようなものがありますか？

答．「4元数」では，結合法則が一般には成立しません．結合法則が成り立たない代数系が詳しく研究されていると聞いたことがありますが，私(石川)は寡聞にして詳細を知りません．悪しからず．

問．”群の由来”から，群を大きく”変換群”と”語群”とに分けましたが，違いは何ですか？ $\mathbb{R}$  はどちらに分類されますか？// 群の概念は，もともと何のために考えられたのですか？

答．”変換群”と”語群”の違いは，由来，つまり「出所(でどころ)」の違いだけです．もちろん，抽象的な群の概念は，ただ一種類です．安心してください．ところで「群」は，もともと「変換群」(変換の群)から抽出された概念です．そして， $\mathbb{R}$  は，重要なので，いろいろ顔を出す所が多いわけですが，やはり変換群として理解するのが一番良いと思います． $\mathbb{R}$  がどのように変換群になるかということ，まず，1次元のユークリッド空間を考えます．考えましたか？そうしたら，その上の平行移動という変換の全体の群を考えます．考えましたか？その群の1つ1つの要素が平行移動です．平行移動は，1点がどれだけずれるか，実数を使って特定できるので，この群が  $\mathbb{R}$  と群同型になることがわかります．

問．群などの定義は代数学の概念だと思っていました．いまだに，どの分野がどういうことを学ぶのか分からないです．// 幾何なのに，なぜ代数をやるんですか？幾何を勉強するのに代数の知識が必要なんですか？

答．その通りです．必要です．代数も解析も何でも必要です．ところで，分野の分け方は，便宜的なものなので，あまりこだわらない方がよいと思います．

問．図形の上の基本群が同型かどうかによって図形を分類しようと，という流れだと思いますが，逆に何か群をもってきたときに，それと同型な基本群をもつような図形が存在するでしょうか？(A)

答．良い質問であり，難しい(骨のある)問題ですね．存在します．しかし，それを説明するには，かなり高度な知識が必要になるので，ここでは説明を控えます．(それでも知りたいという時に検索するときのキーワードは「ミルナー構成」(Milnor construction)になります)．

問．(1) 基本群のように，ある位相空間  $X$  に対応する環，体などというものは存在するのでしょうか？(2) 基本群に対して，その部分群，とくに正規部分群，また，(1) を満たす環，体があったとして，その部分環，部分体などは，特別な性質を持つのでしょうか？(A)

答．良い質問ですね．(1) たとえば「コホモロジー環」というものがあります．(2) 「被覆空間のガロア理論」で，基本群の正規部分群が重要になります．コホモロジー環に対しても，幾何的にその部分環が重要になる場合があります．詳しい説明は，ここではできませんが，たぶん，皆さんが大学院に進学すれば，自力で納得できるようになるとと思います．

問．ホモロジー代数がどのような代数的不変量を扱うのか，トポロジーとのつながりを教えてください．

答．ホモロジー群やコホモロジー群です．これらも位相不変量です．トポロジーの重要な道具です．基本群と同じく，代数系を使って定義される位相的に不変な量，すなわち「代数的な位相不変量」です．

問．対称群の積について，可換とは限らないのに，右からする人と左からする人がいる，という曖昧なことでもよろしいのですか？// 写像の合成ならば，右から計算するのが正しいはずですが．

答．なるほど，もっともな意見ですね．でも，仕方がないのです．対称群(置換群)などのように古くから調べられているものは，いろいろな人がめいめいに調べてきたので，さあ統一しようとしても，歴史的因縁があつてなかなかまとまらないわけです．たとえば， $\sigma(x)$  を  $x^\sigma$  と書く流儀もあります．すると， $\tau(\sigma(x))$  は  $(x^\sigma)^\tau = x^{\sigma\tau}$  と書かれるので，見事に左右が逆転します．それはともかく，確かに，ほとんどの皆さんは写像の合成は右から計算するように教わってきていますね．われわれは右から計算するようにしましょう！さて，これで問題は解決しましたが，それはそうと，僕(石川)はよく言うのですが「順序」は数学で特定できるが「右左(みぎひだり)」は数学では特定できません．皆さんがノートに書いた正しい式は，鏡に写しても正しい式です．(鏡に写すと，文字も左右が逆になるけれど)．ですから，右から計算するという決め事は，わかりやすく教育的には十分意味がありますが，数学的には実は意味のない主張なのです．意味がわからないかも知れませんが，右左の問題について興味のある人は，僕(石川)のホームページの <http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html> にある「数理とはなんだろうか」という講演記録を御覧ください．それから，関係ないけれど，僕(石川)は鏡文字が簡単に書けます．

問．演習問題3 1で， $\varphi: G \rightarrow G'$  に対し， $\varphi$  が全射  $\Leftrightarrow \text{Im}(\varphi) = G'$  を示せとありますが，これは，そもそも全射の定義であったような気がします．それを具体的に書けば， $\forall g' \in G'$  に対して， $\exists g \in G$  s.t.  $g' = \varphi(g)$  となるはずですが．

答．その通りです．ほぼ定義どおりですね．でも，この問題は，単射の部分の問題とのセットとして意味がある，と考えてください．定食でたとえると，単射の部分がメインの皿で，全射の部分が，定食についてくる小鉢です．小鉢がなくても構わないけれど，少し寂しい．

問．トポロジーは何の役に立つのですか？トポロジーはどんなことに応用できるのか，またできないのか．ただの学問なのか．微積分学が物理と深くつながっているように，他の学問に応用できたりするのでしょうか？数学のことで，こんなことを疑問に思うこと自体ナンセンスですね．

答．ナンセンスではありません．当然の質問です．トポロジーは，不思議な程，いろいろなことに応用できることがわかってきています．応用例がたくさんあってここには書き切れません．もちろん，物理ともつながっているし，他の学問に広く応用できます．安心して勉強してください．それはともかく，質問とは関係ないですが，トポロジーに限らず，数学でも他の学問でも「学問はそれ自体が楽しい」ということも注目したい点ですね．何かのために勉強する，というより，楽しいから勉強する．勉楽(勉強)というやつです．考えてみると，人間の頭脳は，それはそれはすばらしくできていて，コンピュータなど足下にも及ぶません．その優れた頭脳を使い惜しんで，錆つかせて置いておくなんて，とてももったいないわけです．ところで，皆さんは，まだ若いから想像できないかも知れませんが，将来，きっと，無性に勉強したくなる時が来ると思います．自由にいくらかでも勉強できた学生時代がなつかしくなりますよ．きっと．これから，皆さんは経済的に自立するために働く．仕事で必要な勉強をする．仕方なくする．あれっ，ここはどうしてこうなるんだろう，と疑問を持って，そんなこと考えている暇はないぞ，さっさと報告書を書け，などと上司に尻をたたかれて，あわてて，わけもわからず資料整理．それでなんとか業績をあげて昇格して，収入も増え，仕事が少しずつ楽しくなる．生活が安定してきて，自由な時間も少しできてくる．だが，仕事は毎日同じことのくり返しだ．じゃあ，趣味を広げよう．でも，ただの暇つぶしだと，底が浅くて味気ない．趣味仲間とおしゃべりして，それでおしまい．むなしい．学生時代は，こんな勉強何の役に立つんだろう，とっていたけれど，楽しかったな．自由だった．何をやっても良かった．ああ，あのときなんでもっと勉強しなかったんだろう... そんなとき，もう少し，奥の深いことを勉強したくなります．そんなとき「ただの学問」をしたくなります．きっと．そんなことも，気付くのに遅すぎるということはないですが，早すぎるということもありません．ということで，ではまた．