幾何学２ (トポロジー入門) 質問に対する回答

No. ５ (２００３年５月２７日) の分　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

問. 不変量とはどういうものですか？// 位相不変量とは何ですか？// 「位相空間 X 上の連続な曲線全体を考える」とおっしゃいましたが，その曲線全体が位相不変量なのですか？// ”位相不変量”とは「同相で不変な量」を指す言葉であって，具体的に定義されていない，ということでしょうか？

答. おはようございます．さて回答ですが，**不変量とは不変な量のことです**．英語で **invariant** と言います．調べたい対象と，それらに関するある同値関係を指定したとき，その１つ１つの対象に対して定まる「量」であって，２つの対象が同値であれば，それらの「量」が同じになるようなもの，その意味で “不変” な量があれば，何でも，不変量と呼びます．いろいろな分野に，いろいろな不変量があります．この講義では，**位相不変量**を扱います．位相不変量とは,「同相で不変な量」のことであって，調べる対象は図形 (正確には，位相空間) であり，同値関係は，同相 (あるいは位相同形とも呼ぶ) という同値関係です．その際，不変量の「量」という言葉を，広い意味に捉え，たとえば代数学で学ぶ「群」なども含むこととします.「同じ量」という言葉も，広い意味に捉え,「同型な群」という意味も含むこととします．この意味で，位相不変量の例として**基本群**が知られています．２つの図形が同相ならば，それぞれの基本群が群として同型になるわけです．(正確には，基本群は「基点」の指定の仕方によりますが)．ともかく，**図形よりも，群の方が簡単**であり，**同相でない，ということを直接判定するよりも，群が同型でない，ということを代数的に判断する方が簡単**なので，基本群などの位相不変量は役に立つわけです．この講義では，これから「基本群」を具体的に定義していきます．ところで．講義でも少し説明しましたが,「位相空間 X 上の連続な曲線全体」も位相不変量です．ただし，この場合,「量」とは「集合」のことを意味し,「同じ量」とは「集合として同型」つまり「濃度が等しい」という意味であるとします．２つの図形の間に同相写像があれば，それぞれの図形上の道の全体の集合の間の全単射が導かれます．したがって，位相不変量です．でも,「位相空間 X 上の連続な曲線全体」は大きすぎて扱いづらいし，群の構造も入らなくて，判定に使いづらいので，そこから**基本群という良い位相不変量を「抽出」「精製」するのだ**，と考えると良いです.

問. 同相である，というものの証明であれば，一つ何か同相写像をみつければ十分ですが，逆に「同相でない」としたとき，存在しないことの証明が非常に難しいものであるように感じられます．どのような道すじで示せばよいでしょうか？

答. 道 (のホモトピー類) を考えるという”道すじ”で示します．それはともかく，基本群という位相不変量を作って，基本群を使って同相でないことを判定します.

問. “同相でない” ことを示すのに，“同相である” と仮定し矛盾を導く証明ではだめなのですか？

答. まさに，その矛盾を導くために，位相不変量が必要になるわけです.

問. ある不変量が与えられたときに，それから逆に同相な位相空間が求められたり，同相写像を求めることができますか？

答. 一般には，位相不変量が同じでも，同相であるとは限りません．たとえば，基本群でいうと，S^2 も $\mathbf{R}^2$ も同じ基本群 (この場合，自明群) をもちますが，これらの２つの位相空間は同相ではありません．ただし，**考える対象を制限したり，たくさんの位相不変量を使ったら，同相類が分離できるのではないか**という発想は良い視点だと思います．たとえば，初回の講義で紹介した，ポアンカレ予想も，このような視点から生まれた予想です.

問. 弧状連結と連結の関連は何ですか？// 前に，弧状連結は連結よりも強い概念だが，$\mathbf{R}^n$ の開集合に対しては，連結であることと，弧状連結であることは同値だと習いました.

答. そうです．弧状連結ならば連結です．$\mathbf{R}^n$ の開集合に対しては，逆も成立します．でも，一般には，連結であっても弧状連結とは限りません．たとえば，$\{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x > 0\} \cup \{(0, y) \mid y \in \mathbf{R}\}$ ($\mathbf{R}^2$ の部分空間) は連結ですが，弧状連結ではないことが証明できます．(参考：位相空間 X が連結 (connected) $\Leftrightarrow$「$X = A \cup B$ (A, B は X の空でない開かつ閉集合で，$A \cap B = \emptyset$) とは表されない」)

問. 道が存在するときは，いつでも，X は弧状連結になるのでしょうか？

答. そうとは言えません．わが日本国は弧状連結ではないですが，道は存在しますね．任意の２点に対して，その２点を結び道があるときに弧状連結と言います.

問. 道はどんな位相上でも定義できるのですか？

答. そうです．定義はできます.

問. 道のホモトピーの話がいま一つ理解できませんでした．// 変形のパラメータとは，どのようなものですか？

答. 道のホモトピーは「道の連続変形」のことです．位相空間 X の１つの道は，１つの連続写像 $\ell : I \to X$ です．その始点 $p = \ell(0)$ と終点 $q = \ell(1)$ を止めて，その道の形を徐々に変えていくことが，連続変形の意味です．その際，道より，”ギターの弦”をイメージすると良いかも知れません．弦をつま弾く．あるいは，”川の流れ”をイメージすると良いかも知れません．川が蛇行する．あるいは，”野球の投球”をイメージすると良いかも知れません．球がカーブしてストライク．あるいは，”縄跳びのヒモ”をイメージすると

良いかも知れません．ヒモの両端を固定して，ヒモをまわす．ホモトピーはナワトビー．それはともかく，道の連続変形は，道の族 $\ell_s : I \to X$ です．$\ell_s(t) \in X$ です．$t \in I$ ですが，s の方を変形のパラメータと言います．さて，ℓ_s が s に対しても連続であるということを要請したい．変形が連続というのは，縄跳びで例えると，途中で，ヒモの両端を動かしたりしない，ヒモを途中で切ったりしない，縄跳びを「まばたき」しないで見る，ということです．それはともかく，道の連続変形を明確に定義するために，$H : I \times I \to X$ を $H(t.s) := \ell_s(t)$ とおき，この H が連続である，ということで，道のホモトピーを定義しました．

問． X が3次元のとき，どのような2つの道 ℓ, ℓ' (始点と終点が同じ) にホモトピーが存在するといえるのでしょうか？

答． 正確に言うと，3次元であっても，空間 X の形によって話が変わってきます．ここでは，2つの例で考えてみます．$X := \mathbf{R}^3 \setminus D^3$ と $Y := \mathbf{R}^3 \setminus D^2 \times \mathbf{R}$ です．図をイメージしてください．X は $\mathbf{R}^3$ から，ボール，あるいは"スイカ"を除いた外側の空間です．一方，Y は $\mathbf{R}^3$ から，無限にのびた電柱を除いた外側の空間です．X の2点を結ぶ道は，どの道，始点終点を固定して，連続的に変形させて移り合います．ぐるぐる回せる．スイカは縄跳びができます．でも，Y の2点を結ぶ道は，電柱に何回巻き付いているかによって，お互いに連続的に移り会えるかどうか決まってきます．無限にのびた電柱は，頭と足がつかえて，縄跳びができないわけです．ゴボウは1本のヒモで縛って運べるが，スイカは1本のヒモでは運べない (だからネット状にして運ぶ) のもこのためです．(これもあくまでたとえ話ですが)．基本群の言葉で言うと，$\pi(X) \cong \{e\}, \pi(Y) \cong \mathbf{Z}$ となります．

問． 商位相がわかりません．// 特に「$\mathbf{R}$ の位相から $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ に商位相を入れる」というのがどういうことか，まだよく分かりません．

答． 「位相とは開集合系指定すること．余計なことは気にするなかれ」という点を押さえておけば，簡単です．位相空間の部分と商位相の部分の項目をもう2回だけ読み直してみてください．

問． 「X から A と B を貼りあわせて得られる空間」の定義の時に挙げられたイメージについて，φ として別の取り方も同相なら良いのでしょうか？

答． 確かに，その φ に対しても位相空間が定義されますが，φ を変えると，一般には，違う位相空間ができてしまいます．

問． X と Y を $\varphi : A \to B$ で貼り合わせて得られる空間 $X \cup_\varphi Y$ の定義で，$X \cup Y$ (disjoint union) とするのはなぜですか？// disjoint union でなくても関係ないような気がするのですが．

答． 貼り合わせてできる空間を考える際，もちろん，disjoint union でなくても考えられるわけですが，典型的で多く生じる場合，つまり，1つの空間の中で貼り付ける場合と，2つのばらばらな空間を貼り付ける場合を説明したわけです．ここで，**disjoint union** を明確に定義しましょう．X を位相空間，Y を位相空間としたとき，X と Y の disjoint union とは，位相空間 $(X \cup Y, \mathcal{O}_{X \cup Y})$ のことである．ただし，$\mathcal{O}_{X \cup Y} := \{U \subseteq X \cup Y \mid U \cap X \in \mathcal{O}_X, U \cap Y \in \mathcal{O}_Y\}$ と定義します．X と Y がばらばらに置いてある，というイメージです．実際，定義から，$X \in \mathcal{O}_{X \cup Y}, Y \in \mathcal{O}_{X \cup Y}$ なので，X も Y も disjoint union $X \cap Y$ の中で，開かつ閉集合です．$X \cap Y$ は位相空間として，X と Y に分かれます．

問． "$p \in A$ であって，$q \in \varphi(p)$" と "$q \in B$ であって，$p = \varphi^{-1}(q)$" は同じことではありませんか？

答． 同じことです．でも，"$p \in B$ であって，$q = \varphi^{-1}(p)$" は，p と q が入れ替わっているので，同じことではありませんね．同値関係の対称律を意識して，プリントでは丁寧に定義しているわけです．

問． $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ の要素は $x \in \mathbf{R}$ の属する同値類あり，$x - x' \in \mathbf{Z}$ となる x' の全体のことですか？

答． そうです．$x - x' \in \mathbf{Z}$ となる x' の全体の集合が $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ の要素です．$[x]$ と書いたり，この場合は，$x + \mathbf{Z}$ と書いたりします．

問． 実射影空間 $\mathbf{R}P^2$ について，$\mathbf{R}P^2 = \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}/\sim$ ですが，$\{pt\} \cup \mathbf{R} \cup \mathbf{R} \cup (\mathbf{R}^\times)^2$ と同じようなこのと考えられるような気がします．

答． 少し違います．$\mathbf{R}P^2$ は $\{pt\} \cup \mathbf{R} \cup \mathbf{R}^2$ と分解されます．ただし，この分解は，位相空間としての disjoint union ではないので注意してください．

問． 道の空間はどのくらい "大きい" のですか？位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ 上の道の全体の空間 $LX := \cup_{p \in X} L(p)$ (ただし，$L(p)$ は点 p を始点とする X 上の道の全体) はファイバーバンドルになりそうです．

答． 良い視点ですね．でも，難しいことです．ただし，この場合，難しいとは，negative とか complicated ということではなく， hard という意味です．詳しいことは，ここでは差し控えますが，LX には,「コンパクト開位相」と呼ばれる位相を入れることができます．

問． レポートはいつ返ってくるのですか？

答． そうですね，あまり早く返却すると，それを見てから，遅れてレポートを提出するズルい人がいないとも限らないので... というのは冗談ですが，一応，前の方の演習問題の解答例などは，
http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/ ishikawa/lecture.html
に置いてあります．(pdf ファイルです)．採点済みレポートについては，ともかく，もう少し待っていてください．ではまた．