幾何学２ (トポロジー入門) 質問に対する回答

No. ３ (２００３年５月１３日) の分　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

問． $A \subseteq \mathbf{R}^n$ を部分集合としたとき，$V \subseteq A$ が A の開集合 $\Leftrightarrow \forall a \in V, \exists \varepsilon > 0, \forall x \in A; \|x-a\| < \varepsilon \Rightarrow x \in V$ と定義してはいけないのでしょうか？

答． こんにちは．さて回答ですが，良くわかっていますね．OK です．これでよいのですが，講義では,「相対位相」の考え方が明確になり，一般の位相空間に対しても適用できるような導入の仕方をしました．講義やプリントに書いた定義と，上の質問にある定義の２つの定義が同値 (等価) であることが証明できます．証明してみてください．このように，いろいろな導入の仕方を知っておくと，理解が深まります．

問． 開集合かつ閉集合という集合は，具体的にどのような集合ですか？

答． 講義でも説明しますが，開集合とか閉集合と言う場合は，どこの開集合か，どこの閉集合かを明示することが必要です．たとえば，$X = \mathbf{R}^n$ の通常のユークリッド位相に関して考えると，部分集合 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ であって，$\mathbf{R}^n$ の開集合であり，かつ，$\mathbf{R}^n$ の閉集合であるようなものは，$A = \emptyset$ と $A = \mathbf{R}^n$ の２つしかありません．しかし，一般の位相空間の場合は事情が違ってきます．たとえば，$A = \{0, 1\} \subset \mathbf{R}$ に $\mathbf{R}$ からの相対位相を入れるとき，A の開集合であり，A の閉集合であるものは，$\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$ の４つです．このように，$\emptyset, A$ 以外に A の開かつ閉集合が存在する場合に，A は**連結でない**と言います．あくまでたとえ話ですが，連結でないというのは，互いに接触しないように，窓のない独房に隔離されたいくつかのグループに分かれているといった状態です．

問． 位相空間 X において，$\emptyset, X$ は開かつ閉ですか？講義中の蛇足のコーナーで，$\emptyset$ は「１個も窓がない状態」ではないかとわかりました．この例でいくと，X は何と言えますか？

答． そうです．X もたとえると，１個も窓のない状態です．世界全体が１つの部屋なので，窓は必要ないわけですね．(何度も言っていますが，これは，あくまでたとえ話です)．

問． $\mathbf{R}^n$ に位相を入れるとき，距離を使っていますが，他に方法はないのですか？

答． 通常のユークリッド位相を入れる場合は，ユークリッド距離を普通使います．ユークリッド距離と同値な距離なら，何でも同じ位相を定めることになります．とれとは別に，$\mathbf{R}^n$ には，通常でない位相 (つまり，ユークリッド位相以外の位相) も確かに入ります．極端な例が，**密着位相**です．御存じのように，$\{\emptyset, \mathbf{R}^n\}$ が開集合系であるとして定まる位相です．この位相は，距離から定まる位相ではありません．というのは，密着位相を入れると，ハウスドルフ空間ではなくなる (分離公理が成立しない) からです．

問．「距離」という概念は，今後の位相幾何では，使われるものなのですか？

答． 使われます．距離空間の話を思い出して，同時に，位相空間の話も身につけてください．両方大事です．

問． なぜ，両連続な全単射写像が存在するとき位相同型 (同相) というのですか？

答． 両連続な全単射写像は，開集合系を開集合系に写すからです．言い換えると，位相構造を保つからです．

問． 有限と無限の違いで，$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_r$ と順に書いたり，$\cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ と書いたりするのですか？

答． そうです．もちろん，有限のときでも，$\Lambda = \{1, 2, \ldots, r\}$ とおけば，$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_r$ は，$\cap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ と書くことが可能です．ただし，(可算個でないような) 無限個の集合族を扱うには，順に書き並べるわけにもいかないので，抽象的な書き方をするわけです．

問． $\mathbf{R}P^2 \# T^2 \approx \mathbf{R}P^2 \# \mathbf{R}P^2 \# \mathbf{R}P^2$ となっていましたが，これは則ち，$T^2 \approx \mathbf{R}P^2 \# \mathbf{R}P^2$ ということになりますか？

答． よい指摘ですが，残念ながら違います．T^2(トーラス) と $\mathbf{R}P^2 \# \mathbf{R}P^2$(クラインのつぼ) は同相ではありません．(プリントで紹介した閉曲面の分類リストに重複はありません)．**連結和に対しては引き算はできない**のです．

問． $\mathbf{R}P^2$ はどんな曲面ですか？// 「メビウスの帯に円板を貼りつける」とはどういうことですか？// 実際に $\mathbf{R}^3$ 空間上では書けないものですか？// 球面の対心点どうしを同一視する，ということから，完全代表系が上半球面であるので，その半球面が $\mathbf{R}P^2$ になると考えてしまうのですが，何を考えおとしているのか知りたいです．

答． メビウスの帯の境界部分は，ただ１つの円周と同相な部分からなっています．自分で紙と糊を使って確かめてください．また，円板の境界部分も円周ですね．その２つの円周を貼りあわせるわけです．実際に物理的には不可能ですが，頭の中でその操作を思い浮かべてください．$\mathbf{R}^3$ で (自己交差なしで) 書くことはできません．射影平面を構成するとき，上半球面で代表されるというのは正しいのですが，赤道の部分は，対心点を含んでいるので，その部分を同一視する必要があります．したがって，平らな円板の境界の部分の対心点を同一視することによって射影平面を表す方法もあります (ポアンカレのモデル)．

問． メビウスの帯について，何か定義がありますか？

答． 講義で説明しますが，標準的な定義は，長方形閉領域の１組の対辺を，逆向きに貼り合わせて得られる

商空間というものです．

問． $\mathbf{R}P^2$ は，比に関する同値関係による商集合として教わったのですが，この定義と，講義の説明にあった球面の対心点どうしを同一視するということは,「原点を通る同じ直線上の点を同一視する」ということで同じということですか？

答． そうです．inclusion $S^2 \subset \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ が商空間の間の同相写像 $S^2/\sim \to (\mathbf{R}^3 \setminus \{0\})/\sim$ を導きます．(本来は，同値関係を明記すべきところですが，講義で何度も説明しているので，ここでは省略します．皆さん各自で，それぞれあてはあまる同値関係を定義してみてください).

問． “クラインのつぼ” がよくわかりませんでした．// メビウスの帯とメビウスの帯をはりあわせて円板を切りとると，円板に２つ穴の開けて管を反対側からとりつけたもの (“悪い配管工事”) になるのですか？

答． その通りです．クラインのつぼは，長い管の両端を普通とは反対向きにくっつけて得られます．これも物理的には不可能ですが，頭の中で思い浮かべます．具体的にどう思い浮かべるとよいかというと，管の一方の端の部分をラッパのように大きく広げて，小さな円板を切り抜き，そこに，もう一方の管をとりつけ，その後，ラッパの口を円板でふさぎます．これがクラインのつぼの構成です．したがって，ラッパの口をふさぐ前は，講義で説明した “悪い配管” になるわけです．

問． $\mathbf{R}P^2$ に，管を (２か所で) とりつけたものと，$\mathbf{R}P^2$ に T^2 を連結和したものが同相になるということがよくわかりません．

答． 講義でも説明するかもしれませんが，２ケ所の取り付け部で考えないで，視線を少しずらして，$\mathbf{R}P^2$ の方へ少し入り込んだ部分を取り付け部分と見直せばわかります．

問． 向き付け可能，不可能とはどういうことですか？// 「向き」という言葉と,「向き付け可能」という言葉に関連があるのでしょうか？

答． 関連があります.「向き」が全体で統一的に付けられるような曲面を「向き付け可能」な曲面と言っています．全体で統一的な向きを付けることがどうしてもできない，つまり，向きを付けるのが不可能な場合に,「向き付け不可能」と言います．でも，いったい「向き」とは何でしょう．実は，これは難しいことなのですが，それを簡単に言うと,「向き」をつけるということは，曲面の接平面の向きを指定する，ということで，全体で統一的に向きをつける，ということは，曲面の各点の接平面の向きを連続的に指定する，ということです．メビウスの帯やクラインのつぼでは，向きを付けることは不可能です．３次元空間内の滑らかな曲面 (この場合は向き付け可能) の場合に限れば，法線ベクトルを指定すると，接平面の向きが指定されるので，法線ベクトルを指定するということが，向きを与えることと同じことになります．

問． T^3 や P^3 というものはありますか？

答． あります．たとえば，$T^3 = \mathbf{R}^3/\mathbf{Z}^3 \approx S^1 \times S^1 \times S^1$ です．３次元トーラスと呼びます．トーラスが４角形の対辺を貼り合わせて得られるように，３次元トーラスは，立方体の対面を貼り合わせて得られます．この教室の一方の壁をすり抜けると反対側から出てくる，という SF 的な空間を考えると，それが３次元トーラスになります．

問． 線形代数で出て来た部分空間には線形性がありましたが，今回出て来たものにも，そのような性質がありますか？

答． ありません．相対位相は，位相空間のすべての部分集合に対して定義できます．したがって，位相空間の部分集合はすべて，部分位相空間となります．一方，ベクトル空間の部分集合がすべて部分ベクトル空間とはならないので，状況が全く違うわけです．注意しましょう．

問． クラインのつぼ ($\mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2$) や $\mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2$ は数式で表現できるのですか？

答． $\mathbf{R}^4$ の中で，代数曲面として実現でき，方程式で表される，ということだけはわかっていますが，非常に複雑になります．球面のときのように，簡単な式では表されません．

問． ある空間を切ったりはりあわせたりすることなく，ひきのばしたりするだけで別の空間に移しかえることができるとき，それらの空間は同相となるような気がします．同相であるとは，こういうものだと思ってもよいのでしょうか？

答． 良いのですが，すこし狭い考えです．一度切っても，最終的につなげれば，同相写像が得られます．

問． オイラー標数は図形に対して，どのような意味をもっていますか？

答． 図形の複雑さの１つの指標です．図形を３角形 (あるいは単体とよばれるもの) に分割したときの，３角形や辺や点の個数で記述できます．また，閉多様体の場合，その上の接ベクトル場の特異点の指数の和がオイラー標数になる (ポアンカレ・ホップの定理) という意味をもっています．

問． どうすると図形のイメージがわきますか？

答． 天性の才能もあるかも知れませんが，慣れが大きいと思います．皆さんも，慣れてイメージが豊富になるように，引き続きがんばってください．ではまた．