幾何学２ (トポロジー入門) 質問に対する回答

No. １ (２００３年４月１５日) の分　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

問． トポロジーとは何ですか？// 前に何かの本で読んだのですが，○ と △ は，トポロジーでは同じ，と書いてあった気がしたのですが，本当ですか？

答． こんにちは．前回，成績をテストとレポートと質問書でつける，と言いましたが，どういうウェイトで評価するかというと，テスト：レポート：質問書 $= 3:2:1$ とします．さて質問に対する回答ですが，本当です．プリントに直接は書きませんでしたが，ここで言う「トポロジー」は「位相幾何 (いそうきか)」の意味で使っています．そして，位相幾何とは，この講義の目的に出てくる，**図形 (空間) を "同相である" という同値関係をもとに調べる幾何学**のことです．

問． 「図形を基本群を用いて調べる」ということについて，もう少し詳しく教えてください．

答． はい，講義の中でだんだんと説明していきたいと思います．

問． この講義は「代数的な不変量」から図形を調べていく，ということですが，どこかで,「位相的不変量」という言葉を耳にしたことがあります．

答． 基本群は位相的不変量 (同相という同値関係で変わらない量) です．したがって,「代数的な位相的不変量」であると言えます．

問． 図形を調べるということは，いつごろから行われていたのですか？

答． われわれの身近に図形があるので，文明が発生したときからずっと調べられてきた，と言えます．まずは，ユークリッド幾何ですが，三角形や直線の研究は測量の必要性から生まれたし，円の研究は「プトレマイオスの宇宙論」には欠かせませんでした．並行して研究された円錐曲線は,「ガリレオの宇宙論」でみごとに応用されました．デカルトの座標幾何を経て，ガウス・ロバチェフスキーの非ユークリッド幾何が発見され,「アインシュタインの宇宙論」に応用されました．２０世紀になって，位相幾何 (トポロジー) が研究され，２１世紀になりました．これが図形の研究の歴史です．

問． 位相空間とは何ですか？

答． プリント「ト２」を読んでください．講義でも，説明します．

問． n 次元位相多様体についてよくわかりません．// 「局所的に $\mathbf{R}^n$ と同相」の部分がよくわかりません．

答． 「局所的」は英語でいうと local, 対義語は「大域的」(global) です．たとえ話で恐縮ですが，S^2 を地球にたとえて，世界地図帳を想像してください．地図帳の１ページ１ページは，$\mathbf{R}^2$ (あるいは，平面領域) で出来ていますね．S^2 は (global には１枚の地図では表されないにしても)，local には平面 $\mathbf{R}^2$ と同相である，同相であるという同値関係の範囲で，各点の近傍が $\mathbf{R}^n$ (あるいはその開集合) で表されるような空間である，ということです．多様体でないものの１例は，$\mathbf{R}^3$ の中の円錐です．

問． n 次元位相多様体の定義の条件の１つに，Hausdorff 空間であるとありますが，必要な条件なのですか？具体的な例などありますか？

答． よい質問ですね．例があります．座標付けられた２直線 L, L' を用意してください．それを貼り合わせて位相空間を作るのですが，どう貼り合わせるかというと，原点以外の同じ座標の点を貼り合わせます．想像できますか？L の原点 O と L' の原点 O' は貼り合わせていないので，異なる点ですが，それぞれを含む２つ開集合は，必ず共有点をもってしまいます．したがって，局所的には $\mathbf{R}$ と同相であるが，Hausdorff 空間でないような例です．このような空間は扱うのが面倒なので，ここでは除外して話をすすめているわけです．

問． 「コンパクト」とはどういうことですか？

答． 位相空間 X が**コンパクト**であるとは,「X の任意の開被覆 $X = \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ に対し，有限部分開被覆 $U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_m}$, $X = U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_m}$ が存在する.」ということです．キーポイントなので，よく覚えておいてください．

問． 「同相である」について,「同相写像が１つでも存在すれば同相で，１つも存在しなければ，同相でない」という解釈でよろしいですか？

答． よろしいです．と言いますか，他に解釈の仕様がないです．これが定義そのものです．

問． 同相写像の定義が「全単射で両連続」書いてありますが,「全単射」は片側全単射でよいのですよね？

答． そうです．X, Y を集合とし，$f : X \to Y$ が全単射ならば，逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ は全単射になります．全単射は「集合同型写像」とよぶことができます．後で講義で説明する予定の「群同型写像」についても事情は同じです．全単射群準同型写像は必ず群同型写像です．しかし,「同相写像」については事情が違っていて，**全単射連続写像の逆写像が連続であるとは限りません．**

問． $S^{n-1} := \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ を $(n-1)$ 次元球面と言いますが，どうして S^n とは書かないのですか？

答． S^{n-1} 自体が $(n-1)$ 次元だからです．拘束条件が１つあるから，次元が１つ下がります．n 次元空間に入っている $n-1$ 次元の空間だからです．たとえば，平面内の単位円 S^1 は１次元です．単位円上の点は，御存じの通り，$x = \cos t, y = \sin t$ と１つだけのパラメータ t を使って表されますね．だから１次元です．そこで，S^1 と書きます．この場合，肩の数は次元を明示しているわけです．

問． 前に，D^2 と D^2 を貼り合わせると S^2 と等しくなる，ということを教わったのですが，どうしてそのようなことが言えるのですか？

答． トポロジー (位相幾何) だから，同相であるという範囲で，図形を変形することを許しているのです．たとえ話で恐縮ですが，S^2 を地球 (の表面) にたとえると，北半球 (赤道を含む) が D^2 と同相で，南半球 (赤道を含む) も D^2 と同相なので，その意味で，D^2 を境界に沿って貼り合わせると S^2 ができる，と言います．

問． 閉曲面は，閉じているのに境界が入らない，という説明が分からないです．

答． なるほど．これは,「境界」という用語が，２つの意味で使われていることからくる，もっともな質問です．たとえば，$S^2 \subset \mathbf{R}^3$ を考えてみましょう．S^2 は $\mathbf{R}^3$ の閉集合なので，境界点はすべて S^2 に入ります．実際，S^2 のすべての点は，S^2 の $\mathbf{R}^3$ の中での境界点です．この境界点の定義は，もともと，$\mathbf{R}^2$ や $\mathbf{R}^3$ の領域を調べることから派生した用語です．それはそれでよろしい．一方，閉曲面という用語は，D^2 や $\mathbf{R}^2$ などのように「端」(ふち，あるいは「縁」，へり) があったり,「無限にのびている」ような曲面ではない，という意味あいで使っていて，その端のことを境界とよん

だわけです.「位相空間論」でいう境界と,「多様体論」でいう境界は，専門用語として意味が違うのです．両方よく使用される用語なので，注意が必要ですね．

問．「閉曲面」と「閉集合」とは全く異なる概念なのですか？

答．そうです．使う状況が異なる概念 (用語) です.「閉曲面」は，講義で説明したように，ある条件をみたす特別な位相空間に対する用語であるのに対し,「閉集合」は位相空間の部分集合にたいする用語です．ただし，通常，閉曲面は，$\mathbf{R}^3$ の閉集合 (あるいは，$\mathbf{R}^4$ の閉集合) として記述される，ということは言えます．

問．S^3 はどの様なものですか？

答．たしかに表現するのが難しいですが，この３次元空間 ($\mathbf{R}^3$) に，無限遠点を１点付け加えたものを想像すると良いと思います．(トポロジー的には，それで十分です).

問．基本群の群は，代数の分野で扱う群 (group) のことですか？

答．そうです．群は幾何の分野でも扱います．もっと言うと，代数で習うことでも，解析で習うことでも，何であっても，幾何の分野でも扱います．数学に垣根なし．数学は一つの有機体である，と言われます．

問．第２可算公理とは何ですか？// 可算基とは何ですか？// 第１可算公理というものがあれば教えて下さい．

答．説明します．そのために，$(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とします．$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}_X$ が**開基** (あるいは単に**基**) であるとは，任意の $U \in \mathcal{O}_X$ が，$\mathcal{B}$ に属するような集合の和集合で書けるときに言います．加算個の集合からなる開基を**可算基**と言います．可算基を持つ位相空間を**第２可算公理をみたす**位相空間と言います．また，第２可算公理より弱い条件になりますが，任意の点 $x \in X$ に対して，可算個の開近傍の族 $\mathcal{B}_x$ があり，任意の $V \in \mathcal{O}_X$ に対し，ある $W \in \mathcal{B}_x$ があって，$x \in W \subseteq V$ となるとき，**第１可算公理をみたす**と言います．距離空間は，第１可算公理をみたします．たとえ話が思い付かなかったので，分かりづらいときは直接質問してください．

問．ユークリッドの距離は偶然に生まれたものですか？一般の空間において，座標を用いないで定義される距離というものはあるのでしょうか？

答．ユークリッドの距離は，測量から歴史的に (自然に，必然的に) 生まれたものと考えられます．でも，御存じのように，$\mathbf{R}^n$ の上にもいろいろな距離が入るし，一般の空間でも，距離が定義される場合があります．

問．「デカルト空間」と「ユークリッド空間」の違いがよく分かりません．// 納得がいきません．同じものだと思っていたのですが，どうなんでしょうか？

答．ただの $\mathbf{R}^n$ がデカルト空間です．(別名，数空間)．それに，ユークリッド距離 d を入れた距離空間 $(\mathbf{R}^n, d)$ がユークリッド空間です．同じ集合ですが，そこに特別な距離構造を特定したものをユークリッド空間とよび区別した次第です．ちょっとしか違わないのですが，この違いは，現代数学の物の考え方の根幹にかかわります．(とくにこだわらない人も多いので，神経質になる必要はありませんが，一応，教養として身に付け，ぜひ，“違いのわかる人” になってください)．ここで，お得意の例え話をすると,「デカルト空間」は，いわば「風呂おけ」です.「ユークリッド空間」は，そこにお湯をはった「お風呂」です．この違いです．単に風呂と呼んでよいのですが,「この部屋には風呂がついている」という場合の風呂は風呂おけのことであり,「では，風呂に入るか」という場合は，もちろんお湯がないと寒くて仕方ないわけです．ユークリッドの時代の人は，天然の温泉に入っていたので「風呂おけ」のことは知らなかったが，デカルトが「風呂おけ」を考え出したあとは，銭湯でも自宅でも自由に風呂に入れるようになった… というのも単なるたとえ話です.「風呂がでかいと気持ちがいいな．ゆっくりとお湯につかろうぜ」じじいギャグで失礼しました．

問．「同型」と「同形」の違いに，深い意味はないのでしょうか？

答．国語 (日本語) の授業ではないので，深い意味はありません．同型は同じ型 (かた)，同形は同じ形 (かたち) というニュアンスです．

問．topology(トポロジー) を,「位相」と訳すのはどうしてでしょうか？物理での「位相」とは違う概念だと思います．誰が訳したのですか？

答．誰が訳したかは知りません．調べて教えてください．ちなみに，物理の位相は phase です．phase は「相」とも訳しますね．そうですね．ところで,「topology」という用語は，２つの意味あいで使われることに注意しましょう.「位相構造」の「位相」という意味と,「位相幾何学」という意味の２つです．この講義の「トポロジー入門」は，もちろん，位相の話が基礎になるのですが,「位相幾何学入門」というニュアンスで付けられています．

問．幾何学は抽象的なものばかりで難しいのではないでしょうか？

答．なるほど．でも，数学はすべて抽象的ですね．たとえば，数字の 1 も抽象的です．1 が街を歩いてはいません．全部頭の中の産物です．あとは，そういう抽象的なものにいかに慣れていくか，ということだと思います．習うより慣れろ．

問．幾何 (トポロジー) を勉強するのに，どの範囲を復習すれば良いですか．位相空間や群については勉強すべきだ，ということは何となくわかったのですが，他に，勉強しておくべきことは何ですか？

答．講義を聞いていて，わからないこと，あやふやなことを復習するとよいと思います．強いて言えば，**微分積分と線形代数と論理**をもう一度確認しておくことを勧めます．

問．休む回数が多いかもしれないのですが，大丈夫でしょうか？

答．保証はもちろんできません．わかりません．ともかく，がんばってテストで満点をめざしてください．

問．板書は逐一とるべきでしょうか？

答．基本的に皆さんに任せています．プリントにメモするだけでよいように資料を (不十分ながら) 準備しています．でも，ノートをとることは単に記録を残すという意味以上に，ノートをとることによって授業内容が記憶されやすいという効果があります．僕 (石川) が学生のときは，プリントが用意されるなどということは全然期待できなかったということもあり，一応，聞いた講義は全部ノートを取りました．一方，ノートをとると，授業を聞く方がおろそかになるからいやだという人もいます．ということで，自分の好み (特徴) をよく考えて，受講されることを期待します．

さて，幾何２の講義を聴いていてどうですか？難しい話も登場してきますが，所詮，同じ人間が考えたこと，時間と手間さえかければ，そのうち良くわかるようになり，楽しくなってきます．意外かも知れませんが，数学は “性急さ” とは無縁の学問です．悠長なものです．手っ取り早く知りたい，という人には不向きな学問です.「あわてるな，数理は急に分からない．数学は徐々に，学ぶものなり」ということで，よろしく．ではまた．