大学院共通授業　トポロジー理工学　特別講義 I（科学とトポロジー）

トポロジー入門

２０１５年４月１０日（金）５講目16：30 - 18：00
於：北海道大学理学部２号館２階 2–211 大学院講義室

石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
北海道大学・大学院理学研究院・数学部門

1　新しい数理モデルとしてのトポロジー

社会のシステム，自然のシステムを理解するには，まず，それらを詳しく調べていろいろな情報を得なければならない．そのプロセスは不可欠である．しかし，詳しい情報をいくら集めて来ても，良くわからないことが多い．何かしっくりこない，腑に落ちない，見通しが立たない．それは対象に近付き過ぎているか，細かな情報にこだわりすぎているか，ともかく，思い切って別の見方ができない．

「無頓着」という言葉があるが，トポロジーの考え方は，詳しい情報を知っていながら，それを超えた見方を敢えてする，粗視化する，いわば「非頓着」の教え，と言えるかもしれない．

いままでの数学の応用と言うと，微分積分であったり，複素関数であったり，フーリエ解析だったり，微分方程式だった．もちろん，これらは現在も将来も役に立ち続けることは明らかである．しかしその上で，それに加えて，トポロジーのような新しい数学も，だんだんと諸科学に応用され出してきた，トポロジーの考え方を使うことで，新しい発見ができる，そのような趨勢が見えてきた，と言える．

「トポロジー」は非常に永い数学の歴史の中で，主に２０世紀になってから発展した数学である．比較的新しい分野だ．新しい分野だが，それでも数学におけるトポロジーの研究には十分な蓄積がある．トポロジーの考え方と共に，この知識の蓄積をいろいろな科学に活用し，社会に貢献していくことは，非常に意義がある．この２１世紀にトポロジーの応用が大いに花開くと思われる．

2　トポロジーとは？

「**トポロジー** (topology [1])」と言った時，トポロジーという “概念” を意味する場合と，その概念を使ったものごとのとらえ方 (“方法”)，あるいはその方法を使った幾何学（位相幾何学）を意味する場合とがある．

トポロジーとは，一言で言えば「**ものごとのつながり具合を表す概念**」
トポロジーは「**柔らかい幾何学**」

[1] トポロジー (topology) の ”topo” は「位置」とか「場所」といった意味である．したがって，昔（１９世紀末から２０世紀当初）は topology は「位置解析」と呼ばれていた．「位相」という訳を誰がつけたかは不明だが，良い訳である．そして，topology という構造が付与されている空間を topological space と言い，位相空間と訳す．ところで，一部の本では，”phase” も ”位相” と訳して，”phase space” を ”位相空間” と訳している場合があり，少し紛らわしい．”phase” は ”相” と訳すことが多いので，”phase space” は ”相空間” と訳すのが紛れがなくて良い．もともと，位置の概念と結びついていた topology という用語と，位置の概念との結びつきがそれほど強くはない phase という用語の訳し分けは工夫することができる．たとえば，”geometric phase” という用語は ”幾何学的相” と訳すのが適切であろう．

連結 (connected)：つながっている状態．
空（くう）でない２つの閉集合に分けられる[2]—連結でない．
空でない２つの閉集合に分けられない—連結である．
どうつながっているかを気にする．たとえば，円筒とメビウスの帯は，両方とも連結であるが，そのつながり具合が異なっている．

3　トポロジーの分野

トポロジー (位相幾何学) の分野を大きく分けると次のようになる[3]．
一般トポロジー (general topology)：位相空間論，次元論．(位相空間 (topological space) の一般論)．
代数トポロジー (algebraic topology)：ホモトピー論，ホモロジー・コホモロジー論，幾何学的群論など．(代数的な位相不変量のための研究である)．
微分トポロジー (differential topology)：４次元多様体論，リーマン多様体の位相，力学系，位相変換群論，シンプレクティック・トポロジー，特異点論など．(微分幾何や数理物理などとの関連を追求する分野も含まれる)．
低次元トポロジー (low dimensional topology)：結び目理論，３次元多様体論，空間グラフ理論，４次元多様体論内の曲面のトポロジーなど．

4　トポロジーの基本用語抄

同相 (homeomorphic)：形容詞．ある図形 (領域) が，別の図形 (領域) と，そのつながり具合をまったく保って移し合わせることができること．両連続な 1 対 1 対応があること．「位相的に同型」とか「topological に同じ」とも言う．使用例:三角形 (の境界) と円周は同相．(関連語．homeomorphism(名詞))．
イソトピー (isotopy)：名詞．図形を同相のままで移動する変形のこと．使用例：結び目理論は，結び目をイソトピーで分類する理論．(関連語：isotopic (形容詞))
ホモトピー (homotopy)：名詞．図形 (正確には”写像”) の連続的な変形のこと．その際，曲線や曲面を 1 点につぶすなどの操作は (連続的であるかぎり) 許される．使用例：メビウスの帯を円周に変形するホモトピーがある．(関連語．homotopic(形容詞))．
開集合 (open set)：名詞．扱っている図形 (領域，空間) の中の点の集まりで，各点に十分近い点がその集まりに属するようなもの．”境界点”を含まない集合．「位相」の概念は，開集合という言葉を使って厳密に述べられる．
閉集合 (closed set)：名詞．扱っている図形の中で，補集合 (残りの部分) が開集合であるもの．”境界点”をすべて含む集合．使用例：連結とは，空でない２つの閉集合には分解できない状態のこと．「開集合」の代わりに「閉集合」をもとに「位相」の概念を述べることもできる．
連続写像 (continuous mapping)：名詞．ある図形から別の図形への対応関係で，”ジャンプ”が生じないもの．行き先の近さを出発点の近さによってコントロールできるような対応．連続写像で写せば，連結なものは連結なものに写る．関連語：連続な (continuous)：形容詞．

5　ホモロジー入門

トポロジーを調べる上で，取り扱いが容易な「ホモロジー」の概念を紹介する．図形のつながり具合だけを問題にしているので，図形を単純化して扱う．

[2]空でない２つの**開**集合に分けられる，ということと等価である．しかし，閉集合で述べた方がわかりやすいので，閉集合を用いた説明を採用することにした．
[3]トポロジーの専門家が皆この分け方に同意する，というわけではない．あくまで目安である．

単体 (simplex)．単体的複体 (simplicial complex)．単体 S に対応する単純鎖 (simple chain) $\widehat{S}$.
単体的複体が与えられたとき，そこに現れる p-次元単体に適当に向きを入れる．
p-次元鎖 (chain)．p-次元鎖群：

$$C_p := \{c = n_1\widehat{S}_1 + n_2\widehat{S}_2 + \cdots + n_s\widehat{S}_s \mid n_i \in \mathbf{Z}\}.$$

($\mathbf{Z}$ は整数の全体を表す)．
境界 $\partial\widehat{S}$．境界準同型写像 (boundary homomorphism) $\partial_p : C_p \to C_{p-1}$:

$$\partial_p c = n_1\partial\widehat{S}_1 + n_2\partial\widehat{S}_2 + \cdots + n_s\partial\widehat{S}_s$$

$\partial_{p-1}\partial_p = 0$ が成立．
$\partial c = 0$ となる p-次元鎖 c を p-次元輪体 (cycle) と呼ぶ．また，ある $(p+1)$-次元鎖の境界となるものを p-次元境界 (boundary) と呼ぶ．
p-次ホモロジー群 H_p は，p-次元輪体を p-次元境界を法として考えて得られる剰余類のなす加群として定義される．

$$H_p := \frac{\{c \in C_p \mid \partial_p c = 0\}}{\{\partial_{p+1}c' \mid c' \in C_{p+1}\}}.$$

例題： ３角形の境界部分（円周と同相な図形）のホモロジー群を計算せよ．
３角形の３辺から C_1 を作り，３頂点から C_0 を作ると，$C_1 = \mathbf{Z}^3, C_0 = \mathbf{Z}^3$ となり，境界準同型写像 $\partial_1 : C_1 \to C_0$ は，行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ で表示される．他の C_p や ∂_p は 0 である．行列 A は，$\mathbf{Z}$ 上の行基本変形および列基本変形によって，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に変形される．したがって，$H_0 = \mathbf{Z}, H_1 = \mathbf{Z}$ となる．

演習問題 1： 上の例題の基本変形を実行し，ホモロジーの計算を実際に確かめよ．

演習問題 2： 漢字の「十」の字を図形と見た時のその図形 X のホモロジー群を例題を参考にして計算してみよ．

演習問題 3： 漢字の「日」の字を図形と見た時のその図形 B のホモロジー群を例題を参考にして計算してみよ．

例：n-次元球体 D_n に対し，$H_0(D^n) = \mathbf{Z}$, $H_p(D^n) = 0, (p \geq 1)$.
例：n-次元球面 S^n に対し，$H_0(S^n) = \mathbf{Z}, H_p(S^n) = 0, (1 \leq p \leq n-1), H_n(S^n) = \mathbf{Z}$.
例：n-次元トーラス T^n に対し，$H_p(T^n) = \mathbf{Z}^r, r = {}_nC_p, (0 \leq p \leq n)$.
例：2-次元実射影空間 $\mathbf{R}P^2$ に対し，$H_0(\mathbf{R}P^2) = \mathbf{Z}, H_1(\mathbf{R}P^2) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, H_2(\mathbf{R}P^2) = 0$.
例：3-次元実射影空間 $\mathbf{R}P^3$ に対し，$H_0(\mathbf{R}P^3) = \mathbf{Z}, H_1(\mathbf{R}P^3) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, H_2(\mathbf{R}P^3) = 0, H_3(\mathbf{R}P^3) = \mathbf{Z}$.

ホモロジー群の位相不変性： 同相な図形を定める２つの単体的複体のホモロジー群は同型である．

一般に，ホモロジー群 H_p は，

$$\mathbf{Z}^r \oplus \mathbf{Z}/t_1\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/t_2\mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}/t_k\mathbf{Z}$$

($t_1, t_2, \ldots, t_k$ は2以上の整数で，t_i は t_{i+1} の約数) の形に一意的に表される．r は H_p の**階数** (rank) と呼ばれるものであり，この場合，r を p-次**ベッチ** (Betti) **数**とも呼び，b_p と書く．また $c_p = \mathrm{rank}(C_p)$ とおくとき，n 次元単体的複体から得られる図形の**オイラー標数** (Euler characteristic) が

$$\chi = c_0 - c_1 + c_2 - \cdots + (-1)^n c_n = b_0 - b_1 + b_2 - \cdots + (-1)^n b_n.$$

で求められる．オイラー標数も位相不変量である．

例：$b_0(D^n) = 1, b_p(D^n) = 0 (p \geq 1)$. $\chi(D^n) = 1$.
例：$b_0(S^n) = 1, b_p(S^n) = 0 (1 \geq p \geq n-1), b_n(S^n) = 1$. $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$.
例：$b_p(T^n) = {}_nC_p, (0 \leq p \leq n)$. $\chi(T^n) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p {}_nC_p = (1-1)^n = 0$.
例：$b_0(\mathbf{R}P^2) = 1, b_1(\mathbf{R}P^2) = 0, b_2(\mathbf{R}P^2) = 0$. $\chi(\mathbf{R}P^2) = 1$.
例：$b_0(\mathbf{R}P^3) = 1, b_1(\mathbf{R}P^3) = 0, b_2(\mathbf{R}P^3) = 0, b_3(\mathbf{R}P^3) = 1$. $\chi(\mathbf{R}P^3) = 0$.

CW 複体: 単体の代わりに，いろいろな次元の球体を貼り合わせた形に図形を分解して考えたもの[4]．ホモロジー群を考えるとき，単体的複体をもとに計算するよりも，CW 複体をもとに計算する方が容易である．CW 複体に関するホモロジー群の定義も同様であり，単体的複体から計算するホモロジー群と同型になる．

6 計算トポロジーの基礎

ホモロジー群や，ベッチ数を計算する際の基本的な考え方，方法を紹介する．

一般に**鎖複体** (chain complex) (C, ∂) とは，加群の列 $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_p, \ldots$ と，加群準同型写像 $\partial_p : C_p \to C_{p-1}$ の列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{p+2}} C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} \cdots$$

であって，条件 $\partial_{p-1}\partial_p = 0$ （つまり，各 $c \in C_p$ に対し，$\partial_{p-1}(\partial_p c) = 0$) をみたすもののことである．単体的鎖複体や CW 鎖複体，下に述べる立方体的鎖複体は，すべて鎖複体である．

標準基底：各 $p = 0, 1, 2, \ldots$ について，C_p の自由生成元

$$a_{p,1}, \ldots, a_{p,\alpha_p}; b_{p,1}, \ldots, b_{p,\beta_p}; c_{p,1}, \ldots, c_{p,\gamma_p}; d_{p,1}, \ldots, d_{p,\delta_p}; e_{p,1}, \ldots, e_{p,\varepsilon_p}$$

($\mathrm{rank} C_p = \alpha_p + \beta_p + \gamma_p + \delta_p + \varepsilon_p$), を選ぶと，2以上の整数 $t_{p-1,1}, t_{p-1,2}, \ldots, t_{p-1,\beta_p}$ で $t_{p-1,j}$ は $t_{p-1,j+1}$ の約数となるものが決まって，

$$\begin{array}{rcll} \partial_p a_{p,i} &=& e_{p-1,i}, & (1 \leq i \leq \alpha_p), \\ \partial_p b_{p,j} &=& t_{p-1,j} d_{p-1,j}, & (1 \leq j \leq \beta_p), \\ \partial_p c_{p,k} &=& 0, & (1 \leq k \leq \gamma_p), \\ \partial_p d_{p,\ell} &=& 0, & (1 \leq \ell \leq \delta_p = \beta_{p+1}), \\ \partial_p e_{p,m} &=& 0, & (1 \leq m \leq \varepsilon_p = \alpha_{p+1}), \end{array}$$

となる．このとき，p-次ホモロジー群は

$$H_p = \mathbf{Z}^{\gamma_p} \oplus \mathbf{Z}/t_{p,1}\mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}/t_{p,\delta_p}\mathbf{Z}$$

となる．

[4]貼り合わせ方に関してある適当な条件を付ける．C: closure finite. W: weak topology.

$\mathbf{Z}$-行基本変形，列基本変形．整数係数の行列を，整数の範囲で可逆な変形を繰り返して，簡単な形の行列にする．

$\mathbf{Z}$-基本変形を用いて，a_p, b_p と e_p, d_p を決め，その後 c_{p-1} を決め，その後，再び，$\mathbf{Z}$-基本変形を用いて，a_{p+1}, b_{p+1} と e_{p+1}, d_{p+1} を決め，その後 c_p を決める．この操作を $p=1$ から $n-1$ まで繰り返す．

演習問題 4. 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ を $\mathbf{Z}$-行基本変形，$\mathbf{Z}$-列基本変形の両方を繰り返し行って，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ にできることを確かめよ．

最近発展している “デジタル・トポロジー”(digital topology) の分野では，単体複体の代わりに，次の立方体的複体を使う．

初等立方体 (elementary cube)．立方体的集合 (cubical set)．p-立方体的鎖 (cubical chain)．

$$c = n_1\widehat{Q}_1 + n_2\widehat{Q}_2 + \cdots + n_s\widehat{Q}_s$$

p-立方体鎖群 C_p．単体的複体のときと同様に，境界作用素 $\partial_p : C_p \to C_{p-1}$ が定義され，立方体的鎖複体 (C, ∂)，**立方体的ホモロジー群** H_p が定義される．立方体的ホモロジー群は，単体的ホモロジー群と同型である．

7　グラフ理論の基本用語抄

グラフとは：グラフ (graph) は，いくつかの頂点と，頂点と頂点を結ぶ辺からなる図形である．その際，辺の長さは考慮せずに，つながり具合のみに注目する．グラフは「(頂点の集合が指定された）位相空間」あるいは「1次元単体的複体 (one-dimensional simplicial complex)」とみなすことができる．

頂点 (vertex) の集合を V と書き，**辺** (edge) の集合を E と書く．各辺 e は，ある頂点 u と v $(u \neq v)$ を結んでいる．また，頂点 u, v に対し，それを結ぶ辺は，あってもただ1つとする．その場合，u や v は辺 e の**端点** (terminal point) と言い，また e に**接続**している (incident) とも言う．2つの頂点 u, v がある辺の端点となっているとき，u, v は**隣接**している (adjacent) と言う．また，2つの辺 e, e' がある端点を共有しているとき e, e' は**隣接**していると言う．

ここでは,「ループ」（同一の頂点を端点とする辺）や「多重辺」（同じ端点の組を共有する複数の辺）の存在は許していない．

２つのグラフ (V, E) と別のグラフ (V', E') が**同形** (isomorphic) とは，E と E' の1対1対応と，V と V' の1対1対応があって，各辺の端点と対応する辺の端点が対応しているときに言う．

また，各辺に向きが与えられているときは，**有向グラフ** (oriented graph) とよぶ．有向グラフの場合は，グラフは，写像 $E \to V \times V$ を指定すれば定まる．つまり，辺 e に対して，順序付けられた端点の組 (u, v) を指定すれば有向グラフが定まる．このとき，u を**始点** (start)，v を**終点** (end) とよぶ.（辺に向きが付いていない場合は，端点に始点，終点の区別はつけない）.

完全グラフ：任意の２つの頂点が辺で結ばれているグラフ．

頂点数 n の完全グラフを K_n で表す．

点彩色（てんさいしき)：隣接する頂点が異なる色になるように，すべての頂点に色をつけること．

２部グラフ：２色で点彩色できるグラフ．

辺彩色：すべての辺に色をつけること．(「点彩色」の場合とは異なり，隣接する辺を異なる色にする，という指定は無い)．

演習問題 5：K_6 を 2 色で辺彩色すると，同じ色で塗られた 3 角形が必ずできることを示せ．同じ色で塗られた 3 角形がただ 1 個になるようにできるか調べよ．

クリーク：あるグラフの中の完全グラフ．
サイクル：ある頂点から出発する隣接する辺と隣接する頂点の列でもとの頂点に戻るもの．
木 (tree)：サイクルを持たない連結なグラフ．
林 (forest) ：いくつかの木からなるグラフ．
ハミルトン・サイクル：あるグラフの中で，すべての頂点を通るサイクル．
マッチング：与えられたグラフに対し，隣接しないいくつかの辺を選ぶこと．あるいは選んだ辺からなる（非連結な）部分グラフ．
平面グラフ：平面上に，辺が交差しないように描けるグラフ．

8　位相と位相空間

数学のトポロジーの本を読むときに，知っておくと便利な予備知識．

集合 X が位相空間とは，X の部分集合の一つ一つが “X の開集合である”か “X の開集合でない”かが，いちいち明確に決められている (決める手続きが与えられている) 場合に言う．

ただし，次のことが最低限要求される (開集合の決めかたの条件，**開集合系の条件**)：
X の開集合たちの**有限個の共通部分**も X の開集合である．
X の開集合たちの**和集合** (無限個の和集合であってもよい) も X の開集合である．
X 自身と $\emptyset \subseteq X$ は X の開集合である．

$\mathcal{O}_X := \{U \mid U \subseteq X$ は X の開集合 $\}$ ($\subseteq \mathcal{P}_X := \{S \mid S \subseteq X$ は X の部分集合 $\}$)
と書くことがある．$\mathcal{O}_X$ は，X の開集合たちの集合である．位相空間 X の**開集合系**あるいは**位相** (topology) あるいは**位相構造** (topological structure) とよばれる．
開集合系が初めに与えられた場合,「**閉集合** $\Leftrightarrow$ その補集合が開集合」と定義される．
注：場合によっては，開集合系の代わりに**閉集合系**を指定することがある．

閉集合系の条件は次で与えられる：
X の閉集合たちの**有限個の和集合**も X の閉集合である．
X の閉集合たちの**共通部分** (無限個の共通部分であってもよい) も X の閉集合である．
X 自身と $\emptyset \subseteq X$ は X の閉集合である．

9　基本的な位相空間

n 次元デカルト (Cartesian) 空間 (ユークリッド (Euclid) 空間)：$\mathbf{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, (1 \leqq i \leqq n)\}$.

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

n 次元**閉円板** (closed disk, 閉球体, closed ball)：$D^n := \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leqq 1\}$.

n 次元**開円板** (open disk, 開球体, open ball)：$\overset{\circ}{D^n} := \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| < 1\}$.

$(n-1)$ 次元**球面** (sphere)：$S^{n-1} := \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. S^1: 円周，S^2: 球面，S^3: 3 次元球面.

単位区間 (unit interval, ゼロイチ区間) $I = [0,1] := \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leqq x \leqq 1\}$.
n 次元**立方体** (cube)：$I^n := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid 0 \leqq x_i \leqq 1, (1 \leqq i \leqq n)\}$.

例. $\overset{\circ}{D^1}$ と $\mathbf{R}^1$ は同相である．$\overset{\circ}{D^2}$ と $\mathbf{R}^2$ は同相である．$\overset{\circ}{D^n}$ と $\mathbf{R}^n$ は同相である．

同相である $\overset{\text{def.}}{\iff}$ **同相写像** (両連続な全単射) が存在する．

演習. D^1 と $I^1 = I$ は同相である．D^2 と I^2 が同相である．

※ $\mathbf{R}^n$ の開集合系.

$U \subseteq \mathbf{R}^n$ が $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\overset{\text{def.}}{\iff}$ 「$\forall a \in U, \exists \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbf{R}^n, (\|x - a\| < \varepsilon \Rightarrow x \in U)$」

演習問題. この $\mathbf{R}^n$ の開集合の決め方が開集合系の条件を満たすことを確かめよ．
例. $\overset{\circ}{D^n} \subset \mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である．
例. $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である．
例題. A 君は,「開集合でなければ閉集合だ」と言っている．彼は正しいか？

※ $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A の開集合系 (**誘導位相**).

$V \subseteq A$ が X の開集合 $\overset{\text{def.}}{\iff}$「$\mathbf{R}^n$ のある開集合 U があって，$V = U \cap A$ と表される.」

例. $\mathcal{O}_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}_{\mathbf{R}^n}\}$ は開集合系の条件を満たす．

※ 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ の部分集合 A の開集合系 (**誘導位相**).

$\mathcal{O}_A := \{V \subseteq A \mid \exists U \in \mathcal{O}_X, V = U \cap A\}$.

相対位相を入れた部分集合を**部分空間**とよぶ．
例. 上の $\mathcal{O}_A$ は開集合系の条件を満たす．
注：「開集合である」とか「閉集合である」という場合は，誤解のないように「D^3 の開集合である」とか「S^2 の開集合である」という具合に，何処で考えているかを必ず明示しよう．

10 多様体と閉曲面

n 次元**位相多様体**：ハウスドルフ (Hausdorff) 空間であって，局所的に $\mathbf{R}^n$ と同相な位相空間．つまり，

位相空間 M が n **次元位相多様体**であるとは，次が成り立つこと：
Hausdorff **性** $\forall p, q \in M, (p \neq q), \exists U, V$, U は p の開近傍，V は q の開近傍，$U \cap V = \emptyset$
局所ユークリッド性 $\forall p \in M$ $\exists W$, W は p の開近傍, $\exists \Omega$, Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合，$\exists \varphi : W \to \Omega$, φ は同相写像.

２次元コンパクト位相多様体のことを簡単に**閉曲面**とよぶ.

(コンパクト性については講義で説明する予定).

閉曲面の位相的分類.

◇ “向き付け可能” な閉曲面. $S^2, T^2, T^2\#T^2, T^2\#T^2\#T^2 = \#_3T^2, \dots, \#_gT^2, \dots$

$\#$ は**連結和**という操作である. (講義で説明する). $S^2 = \#_0T^2$ とみなすと, 考えやすい.
例題. $T^2, T^2\#T^2, T^2\#T^2\#T^2 = \#_3T^2$ を図示せよ.

◇ “向き付け不可能” な閉曲面. $\mathbf{R}P^2, \mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2, \mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2, \dots, \#_g\mathbf{R}P^2, \dots$

これらの分類は, 閉曲面たちを「同相である」という同値関係で分類したもの.

よく知られた位相不変量[5]
種数 (ジーナス, genus) g :
曲面 $\#_gT^2$ や $\#_g\mathbf{R}P^2$ に対し, 数 g をその種数とよぶ. S^2 は種数 0. T^2 は種数 1. $\mathbf{R}P^2$ は種数 1.
オイラー標数 (Euler characteristic, Euler number)
$\chi(S^2) = 2, \chi(\#_gT^2) = 2 - 2g. \quad \chi(\#_g\mathbf{R}P^2) = 2 - g.$
(χ は「カイ」と読む).
注：S^2 は $\mathbf{R}P^2$ の２重被覆. T^2 は $\mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2$ の２重被覆. $\#_{g-1}T^2$ は $\#_g\mathbf{R}P^2$ の２重被覆. このとき,
$\chi(\#_{g-1}T^2) = 2 - 2(g-1) = 2(2-g) = 2(\chi(\#_g\mathbf{R}P^2))$.

11　微分トポロジー

微分トポロジーとは, 滑らかな (微分可能な) **多様体**[6]と, 多様体から多様体への滑らかな (微分可能な) 写像について, 滑らかな (微分可能な) 同相写像 (**微分同相写像**, diffeomorphism) での同一視のもとで研究する方法・分野のことである. 計量によらない不変量をさがす.

微分トポロジーにおける現在までの主なトピックスを挙げる[7]：

ホイットニー (H. Whitney) ：多様体の概念の確立. 埋め込み定理 (１９３０年代).
モース (M. Morse)：大域変分法 (“Morse” 理論)(１９３０年代).
トム (R. Thom)：コボルディズム理論の創始 (１９５０年代).
ミルナー (J. Milnor) ：エキゾチック球面の発見 (１９５０年代).
スメール (S. Smale) ：５次元以上のポアンカレ予想の解決 (１９６０年代).
アティヤ (M. Atiyah) シンガー (I. Singer) ：ディラック作用素の指数定理 (１９７０年代).
フリードマン (M. Friedman) ：４次元ポアンカレの予想の解決 (１９８０年代).
ドナルドソン (S. Donaldson)：ゲージ理論の４次元トポロジーへの応用 (１９８０年代).
サーストン (W. Thurston) ：３次元多様体の分類理論 (１９８０代〜).
アーノルド (V. Arnold), グロモフ (M. Gromov) ：シンプレクティック位相幾何 (１９８０年代〜).
ウィッテン (E. Witten), コンセヴィッチ (M. Kontsevich) ：数理物理と微分トポロジー, ミラー対称性 (１９９０年代〜).
ペレルマン (G. Perelman) ：ポアンカレの予想 (３次元) の解決 (２０００年代).

[5]同相ならば等しい量
[6]局所的にユークリッド空間の座標 (チャート) が入るような空間. 座標変換が微分可能であることを要請する.
[7]もちろん他にも良い仕事がいろいろある.

12　トポロジカル特異点論

特異点とは，周囲で際立っている点のこと．特異点に対象の情報が集約していると考えられる．**特異点の概念はトポロジーと同値関係が特定されれば定まる**．特異点論は主に微分トポロジーや代数幾何とのつながりの中で研究されてきた．とくに，微分トポロジーとの関係での特異点論の基礎理論は次のように確立されてきたと言ってよい：

ホイットニー (H. Whitney)：微分可能写像の特異点論 (１９５０年代)．空間曲面を平面に写像したときの generic 特異点がフォールド (fold) とカスプ (cusp)．

トム (R. Thom)：カタストロフ理論 (１９６０年代)．正則横断性の概念．形態形成を関数の特異点で説明する試み．

マザー (J. Mather) ：安定写像の特異点の分類 (１９６０年代末から７０年代)．無限小構造安定性，特異点の分類の基礎理論の確立．

アーノルド (V.I. Arnold)：ラグランジュ・ルジャンドル特異点論 (１９７０年代〜)．焦点，波面など種々の現象に現れる特異点への応用．

13　空間曲面のトポロジーと微分幾何と特異点論

３次元空間内の曲面について，現代数学の立場から，基本的な概念，用語，現在行われている研究の傾向について概説する．

空間曲面 (表面，界面,...) に対して，その曲がり具合を表現する量として，曲率 (曲面の場合は，ガウス曲率と平均曲率) が定義される．曲線や曲面それ自体に特異点がなくても，その曲がり具合が特異な点がある．**放物点** (hyperbolic point) や**臍点** (へそてん，せいてん，umbilic) などである．それらは，**ガウス写像**や**双対曲面** (dual surface) を見ることにより，特異点としてはっきり見ることができる．(文献：泉屋・佐野)．

空間曲面 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ が $(u,v) = (u_0, v_0)$ で**特異点を持つ**とは，偏微分の外積 $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}$ が $(u,v) = (u_0, v_0)$ で零ベクトル $\boldsymbol{0}$ になること[8]．

ちなみに，写像 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ が $(u,v) = (u_0, v_0)$ で**特異点を持つ**とは，ヤコビアン $J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ が 0 になること．

特異点がない場合をはめ込み (immersion)，この場合は自己交差はあり得るが，自己交差点がない場合，埋め込み (embedding) という[9]．

曲面の場合のガウス写像 (単位球面への写像) の式：

$$(u,v) \mapsto \frac{1}{\|\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}\|} \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}$$

曲面の場合の双対曲面の式：

$$(u,v) \mapsto \frac{\boldsymbol{p} \cdot \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}\right)}{\|\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}\|^2} \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}$$

曲面の**ガウス曲率**は，ガウス写像の面積比の極限値として定義される．ガウス曲率が恒等的に零である曲面 (言い換えるとガウス写像が一定値である曲面) を**可展面** (developable surface) とよぶ．

[8] ヤコビ行列の階数が落ちるところ

[9] さらに，埋め込みの像への同相写像であることを要請することもある

可展面は，局所的には平面に展開できるような曲面のことである[10]．可展面は大域的には，一般に特異点をもつ[11]．可展面の特異点はトポロジカルに８種類に分類される (石川 剛郎, (1994–2000).

可展面の他にも，特別な曲面 (ガウス曲率一定曲面，極小曲面，平均曲率一定曲面など) の大域解析，トポロジー，特異点の研究が (２０世紀の発展を背景に) 現在盛んに行われている．また応用 (視覚理論，映像理論，グラフィクス理論，デザインなど) も盛んである．

14 トポロジーの歴史 (１９世紀まで)

この節の内容はセントアンドリュース大の web-page

`http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Topology_in_mathematics.html`

による．

「トポロジー」は，オイラー (Euler) にはじまる．１７３６年に「ケーニヒスベルグの橋の問題」を解決した論文を出版した．(Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis 日本語で「位置の幾何学に関係する問題の解決」．オイラーは明らかに，距離という考え方にとらわれない幾何学を扱っている．この論文では，７つの橋を一回ずつ渡る問題が不可能であることを示しただけではなく，問題を一般化し，現代の言葉で言えば,「グラフが，各辺を１回だけ通る経路をもつための必要十分条件は，２頂点の次数が奇数であるか，または，すべての頂点の次数が偶数であること」を示している．)

さらに１７５０年にオイラーは，多面体の頂点の個数 v, 辺の個数 e，面の個数 f について，$v-e+f=2$ が成り立つという，有名なオイラーの公式を記した手紙を残している．この簡単な公式が，多面体に関して多くの研究を残したアルキメデス (Archimedes) やデカルト (Descartes) には見逃されていることは興味深い．オイラー以前の人たちにとって，計量が関係しないような幾何的な性質を想像することが不可能だったことがその理由だろう．

オイラーは１７５２年にこの公式の詳細を２つの論文にして発表している．第１論文では証明に至っていないが，第２論文では，多面体を４面体に分割することによる証明を与えている．オイラーは，この驚くべき巧みな証明が，凸多面体にしか通用しないことには気づいていない．

オイラーによって始められたトポロジーの流れは，あまり知られていない数学者ルイリエール (Lhuilier, 1750-1840) によって受け継がれた．彼は一生のほとんどをオイラーの公式に関係した問題に費やした．１８１３年に彼は重要な論文を発表した．オイラーの公式は，穴の開いた多面体については正しくないことを注意し，もし，g 個の穴が開いている場合，$v-e+f=2-2g$ が成り立つことを示した．

メビウス (Möbius) は，１８６５年にいわゆる「メビウスの帯」に関して書いている．メビウスは，メビウスの帯に裏表がないという性質を「向きづけ不可能」という言葉で記述している．彼は，この曲面を整合的に向きのついた３角形で覆うことができないことを見つけた．

「トポロジー」(topology) という言葉を初めて使ったのはリスティング (Listing, 1802-1882) である．リスティングのトポロジーに関するアイディアは，ほとんどガウス (Gauss) に依っている．(ガウス自身にトポロジーに関する著作はないが)．リスティングは１８４７年に「Vorstudien zur Topologie」(トポロジーの予備研究) という論文を書いているし，それ以前も書簡でトポロジーという言葉を使っている．１８４７年の論文では，複体 (complex) という概念も導入している．リスティングは，１８６１年にメビウスの帯を記述した重要な論文を発表している．メビウスの４年前である．そこでは，曲面の連結性についても研究している．

[10]平面と局所等長的．平坦
[11]特異点を持たないのは，平面や柱面に限る．

曲面の連結性を研究しているのは，リスティングが最初ではない．リーマン (Riemann) は１８５１年 (２５歳のときの学位論文)，それから１８５７年の論文で曲面の連結性を論じている．１８５７年の論文とは，リーマン面が導入された．代数方程式 $f(w,z)=0$ の研究から生じた．z を変化させたとき，この方程式を満たす $w(z)$ (一般には多価関数) がどう変化するかが問題である．リーマンは多項式 $f(w,z)$ から定まるリーマン面を導入した．リーマン面の上では，関数 $w(z)$ が一価関数となる．

ジョルダン (Jordan) は，曲面の連結性を調べるもう一つの方法を導入した．ジョルダンは，曲面上の単純閉曲線 (サーキット) が一点に連続的に変形できないとき，それを (既約) サーキットと呼んだ．その曲面のすべてのサーキットが整数係数で $m_1a_1+m_2a_2+\cdots+m_na_n$ と一通りに表されるような既約サーキットの組 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ の個数 n が曲面の位相不変量であることをジョルダンは証明している．

リスティングは連結性を３次元ユークリッド (Euclid) 空間の中で調べているが，ベッチ (Betti) は一般次元の場合に拡張して考えた．最終的に連結性の概念を厳密に基礎づけたのはポアンカレ (Poincaré) である．１８９５年の一連の論文「Analysis situs 」で,「ホモロジー」の概念を導入し，空間の「ベッチ数」を，ベッチ自身が与えたものよりも明解に定義した．そして，ポアンカレは，オイラーの公式を，一般の枠組みに拡張することができた (**オイラー・ポアンカレ標数**の誕生).

同じく１８９５年の論文で，ポアンカレは「基本群」と「ホモトピー」の概念を導入している．

トポロジーが発展した第２の流れは,「収束」の概念の拡張から生じた．１８１７年，ボルツァノ (Bolzano) は，収束の概念を実数列の収束にこだわらず，数直線内の無限集合に関して考察した．

１８７２年にカントール (Cantor) は,「第１導来集合」あるいは「極限点集合」の概念を導入し，実直線の「閉集合」を，その第１導来集合を含むような集合として定義した．カントールは，もう一つの基本概念である「開集合」も定義した．

ワイヤシュトラス (Weierstrass) は１８７７年に講義録の中でボルツァノ・ワイヤシュトラスの定理の厳密な証明を与えている：

数直線上の有界無限集合 S は，少なくとも１つの集積点 p をもつ．すなわち，S の無限点列 a_n で，$|p-a_n|<\dfrac{1}{n}$ を満たすものが存在する．

こうして,「近傍」の概念が導入された．ヒルベルト (Hilbert) は，１９０２年に，近傍の概念を使って，連続群 (位相群) に関して研究した．

15　トポロジーの本

—トポロジーとは？

● 川久保勝夫 著「トポロジーの発想」ブルーバックス B1076 講談社．ISBN 4-06-257076-9
トポロジーの考え方を知るのに最適な啓蒙書．

● 本間龍雄 編「新しいトポロジー」ブルーバックス B214 講談社．ISBN 4-06-117814-8
現在品切れ．安野光雅氏による表紙．

● 永田雅宜 監訳，足立正久，小島誠訳「幾何学からトポロジーへ」紀伊国屋書店．
現在絶版．

● 本間龍雄・岡部恒治 著「微分幾何とトポロジー入門」基礎数学叢書６，新曜社．ISBN 4-7885-0900-6
基本的な話題を手際良く解説．

—トポロジー入門

● 松本幸夫 著「トポロジー入門」岩波書店．ISBN 4-00-005729-4
トポロジー (位相幾何学) の標準的な教科書．

● 小島定吉 著「トポロジー入門」２１世紀の数学７，共立出版．ISBN 4-320-01559-2
トポロジー (位相幾何学) の標準的な教科書．

● 田村一郎 著「トポロジー」岩波全書，岩波書店．ISBN 4-00-021413-6
３角形分割やホモロジーに詳しい．

● 河田敬義 編「位相幾何学」現代数学演習叢書２，岩波書店．ISBN 4-00-005149-0

古いが，よい演習書．
● C. Kosniowski, A first course in algebraic topology, Cambridge Univ. Press.1980. ISBN 0-521-29864-4
トポロジー (位相幾何学) の標準的な教科書．

—応用トポロジー

● 杉原厚吉著「トポロジー」朝倉書店．ISBN4-254-11580-6
わかりやすいトポロジーの概説．応用指向のトポロジーの教科書として，特に計算トポロジーとグラフ理論の解説がある．

—計算トポロジー

● T. Kaczynski, K. Mischaikow, Computational Homology, Applied Math. Sci., 157, Springer-Verlag. ISBN 0-387-40853-3
Cubical homology による定式化とその計算．力学系への応用．

—グラフ理論

● N. ハーツフィールド，G. リンゲル著，鈴木晋一訳「グラフ理論入門」サイエンス社．ISBN4-7819-0654-0
図形としてのグラフ理論入門．
● 前原 潤，根上生也 著「幾何学的グラフ理論」朝倉書店．ISBN4-254-11421-4
グラフ理論の中の幾何学的部分（トポロジー的部分）の解説．

—結び目理論

● 鈴木晋一 著「結び目理論入門」サイエンス社．ISBN 4-7819-0633-8
結び目理論の比較的わかりやすい入門書．
● L.H. カウフマン著，鈴木晋一・河内明夫 監訳「結び目の数学と物理」培風館．ISBN 4-563-00237-2
おもしろい話題が豊富．
L.H. Kauffman, Knots and physics. Third edition. Series on Knots and Everything, 1. World Scientific ISBN: 981-02-4112-7
● 河内明夫 編著「結び目理論」シュプリンガー・フェアラーク東京　ISBN 4-431-70571-6
結び目理論の概観を得るのに最適な専門書．

—特異点と微分幾何

トポロジーは微分幾何学 (曲率など) の知識があると，より活用できる．
● 小林昭七 著「曲線と曲面の微分幾何」裳華房. 微分幾何の定評ある入門書．
● 梅原雅顕，山田光太郎 著「曲線と曲面」裳華房．ISBN 4785315318
新しい微分幾何の教科書．上の２冊ともに，閉曲線や閉曲面[12]のトポロジーと曲率の関係 (ガウス・ボンネの定理など) も説明されている．
● 泉屋周一・佐野貴志 著「幾何学と特異点」特異点の数理１，共立出版．ISBN 4-320-01670-x
幾何学にあらわれる特異点を解析する基本的な方法の概説．いろいろな可視化に活用できるのでは？
● 泉屋周一・石川剛郎 著「応用特異点論」共立出版．ISBN 4-320-01594-0
特異点論の応用に関する専門書．
● V.I. Arnold, Catastrophe theory. Third edition. Springer-Verlag, Berlin, 1992. ISBN: 3-540-54811-4
カタストロフ理論に関する良い概説．
● T. Poston, I. Stewart, Catastrophe theory and its applications. ISBN: 0-486-69271-X
カタストロフ理論の応用に詳しい．
● J.F. Nye, Natural Focusing and Fine Structure of Light, Caustics and Wave Dislocations. Institute of Physics Publishing, 1999. ISBN 0-7503-0610-6
特異点論，カタストロフ理論の光学への応用．

—トポロジーと物理

● 倉辻比呂志 著「幾何学的量子力学」シュプリンガー現代理論物理学シリーズ２，シュプリンガー・フェアラーク東京．ISBN 4-431-71171-6
縦糸に経路積分，横糸にトポロジー．
● 倉辻比呂志 著「トポロジーと物理」パリティ物理学コース，丸善．ISBN 4-621-04045-6
● Giuseppe Morandi, The Role of Topology in Classical and Quantum Physics, Lecture Notes in Physics, m7, Springer-Verlag (1992). ISBN 3-540-55088-7

[12]特異点がなく有界閉集合になっているもののこと．閉集合ということよりは強い意味で使う．