ガウス写像の数学 (幾何学特論４・幾何学講義８) 質問の回答

No. ９ (２００３年１月１０日) の分　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

問． 可展部分多様体のことを tangentially degenerate, strongly parabolic と言うのですか？

答． こんにちは．今回が最終回です．質問書の代わりに,「納得書」を書いてください．いままではわからなかったことで，この半年の講義を聞いて初めて納得・理解できたことを何か１つ選んで書いてください．それから，レポート (前回の講義の記録) は，講義終了時に記録してから，その場で返却します．さて，回答ですが，そうです．同じ概念 (部分多様体の性質) をいろいろな名前で呼ぶということです．developable と呼んだり，tangentially degenerate と呼んだり，strongly parabolic と呼んだりするということです．

問． $\gamma : M \to \mathrm{Gr}(m+1, \mathbf{R}^{n+1})$, $x \mapsto T_{\hat{x}}\hat{M}$, $\pi : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}P^n$, $\pi(\hat{x}) = x$, は，fiber 方向が line なので well-defined になるのですね．

答． そうです．$T_{\hat{x}}\hat{M} = T_{c\hat{x}}\hat{M}, c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ だからです．

問． $\mathrm{Gr}(3, \mathbf{R}^4) \cong \mathrm{Gr}(1, \mathbf{R}^{4*})$ となる理由を教えてください．

答． 写像 $\varphi : \mathrm{Gr}(3, \mathbf{R}^4) \to \mathrm{Gr}(1, \mathbf{R}^{4*})$ を，$H \in \mathrm{Gr}(3, \mathbf{R}^4)$ に対し，$H \subset \mathbf{R}^4$ 上で零になるような線形写像 $h : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ $(h \neq 0)$ をとり，$\varphi(H) = [h]$ と定まると，φ は全単射 (bijection) になります．ここで，$\mathbf{R}^{4*} := \{h : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}\}$ ですが，$h \neq 0$ なので，$h \in \mathbf{R}^{4*} \setminus \{0\}$ であり，その同値類が $[h] \in \mathrm{Gr}(1, \mathbf{R}^{4*})$ ということです．

問． $\mathbf{R}P^{3*}$ の元がどうして $[y_0, y_1, y_2, y_3]$ と書かれるのかわかりません．

答． $\mathbf{R}^4$ も $\mathbf{R}^{4*}$ も両方とも４次元の実ベクトル空間なので，もちろん同一視することができるのですが，区別したいので，$\mathbf{R}^4$ から作った射影空間の点を $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ と書き，$\mathbf{R}^{4*}$ から作った射影空間の点を $[y_0, y_1, y_2, y_3]$ と書いたわけです．

問． $\mathbf{R} \times S^2, S^{3*}$ がよくわかりません．S^{3*} は S^3 ではないのですか？

答． そうです．S^{3*} は S^3 です．そうなのですが，それぞれ，$\mathbf{R}^{4*}$ と $\mathbf{R}^4$ から作った有向 Grassmann 多様体，つまり，$S^{3*} := \widetilde{\mathrm{Gr}}(1, \mathbf{R}^{4*}), S^3 := \widetilde{\mathrm{Gr}}(1, \mathbf{R}^4)$ というふうに区別したかったので区別しています．$\mathbf{R} \times S^2$ のイメージは，$\mathbf{R} \times S^2 \cong \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$，つまり，$\mathbf{R}^3$ から原点を除いたものです．”同心球面”が動径方向に並んでいます．

問． $\mathbf{R}^n_1$ 空間についても，Grassmann manifold の定義がありますか？

答． あります．$\mathbf{R}^n_1$ はベクトル空間としては，$\mathbf{R}^n$ であり，そこに計量 $\langle x, y \rangle := -x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ を与えたものなので，集合としては，$\mathrm{Gr}(r, \mathbf{R}^n_1) = \mathrm{Gr}(r, \mathbf{R}^n)$ です．ただし，幾何構造を考慮すると違いが出てきます．たとえば，計量を保つ線形変換の群は，ローレンツ群 $O(1, n-1)$ であり，通常のユークリッド空間の場合は，直交群 $O(n)$ です．$O(n)$ は $\mathrm{Gr}(r, \mathbf{R}^n)$ の上に推移的に作用しますが，$O(1, n-1)$ の $\mathrm{Gr}(r, \mathbf{R}^n_1)$ への作用は推移的ではありません．実際， たとえば $\mathrm{Gr}(n-1, \mathbf{R}^n_1)$ の元は，３種類，space like, light like, time like に分かれますね．

問． I 上の接触構造の定義のところで，$\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^{4*} \hookleftarrow \widetilde{I} \to I$ となっていましたが，$\widetilde{I} = \Pi^{-1}(I)$ でよいのでしょうか？また，$\widetilde{v} \in T\widetilde{I}$ についてはどうなのでしょうか？

答． そうです．正確には，$\widetilde{I} := \{(x, y) \in \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^{4*} \mid x \neq 0, y \neq 0, x \cdot y = 0\}$ です．ここで，$x \cdot y$ は，$\mathbf{R}^4$ の元と $\mathbf{R}^{4*}$ の元との自然なペアリングです．また，$\Pi_*(\widetilde{v}) = v$ です．

問． 写像 $\mathbf{R}^3 \times S^2 \hookrightarrow I \subset \mathbf{R}P^3 \times \mathbf{R}P^{3*}$ の定義は何ですか？

答． 講義では書き忘れたかも知れませんね．失礼しました．$\mathbf{R}^3 \times S^2 \ni (x, v) \mapsto ([1, x], [-x \cdot v, v]) \in I$ です．

問． 射影変換群の $\{cI \mid c \neq 0\}$ がどういう集合なのかわかりません．

答． 紛らわしかったですね．この I は，単に単位行列を表します．$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ です．

問．「向き」について教えてください．現実の世界で「向き」と言われたら，方向を示すぐらいしか思っていないのですが，数学の世界で「向き」といわれたら，どういうことを言っているのか教えてください．

答．「方向」は，１次元の向きのことです．「向き」は，一般次元で考えられる概念です．まず，**実ベクトル空間の向き**を理解するのが基本中の基本です．実ベクトル空間の向きがわかれば，数学の理解がますます深くなると思います．さて，V を n 次元実ベクトル空間とするとき，V の基底 $u_1, \ldots, u_n$ と $v_1, \ldots, v_n$ が V に**同じ向きを定める**とは，行列式が正であるような n 次実行列 A があって，$(v_1, \ldots, v_n) = (u_1, \ldots, u_n)A$ となることを言います．これは，V の基底たちの集合上の同値関係を定め，同値類は２つからなります．($\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ の２つの連結成分に対応)．その同値類１つ１つを V 上の向きと言います．したがって，V 上の向きは２通りあります．回答 No.5 にもすでに向きについて解説があるので，それももう一度読み返してみてください．

問． どういうときに向きを考えたりするのですか？向きを考えるときと，考えないときの違いのようなものはどのようなものなのでしょうか？

答． 向きを考える必要がある場面はいろいろありますが，やはり，「多様体の向き」を考える，「向きのついた多様体」を考えるときが重要です．

問． 向きを忘れる写像とは何ですか？

答． $\pi : S^n \to \mathbf{R}P^n$ について説明します．$S^n = \widetilde{\mathrm{Gr}}(1, \mathbf{R}^{n+1}) = (\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbf{R}_{>0}$ と見なします．つまり，$\mathbf{R}^{n+1}$ の向きのついた１次元部分ベクトル空間の全体です．１次元部分ベクトル空間の向きは，基底を与えると決まるわけですが，１次元なので，基底とは，単に零ベクトルでないベクトルのことです．１つの向きを与えるベクトルは，単位ベクトルに取ることができるので，S^n の点が対応するわけです．「向きを忘れる」ということは，その向きを与える単位ベクトルと，その反対の向きを与える単位ベクトルを同一視するということなので，S^n の対心点を同一視する，つまり，$\mathbf{R}P^n$ の点を与えることになります．それが，２重被覆 $\pi : S^n \to \mathbf{R}P^n$ の意味です．

問． $\mathbf{R}_{>0}$ とは何ですか？

答． $\mathbf{R}_{>0} := \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$ です．

問． $A \to B$ と $A \hookrightarrow B$ の違いは何ですか？

答． $A \hookrightarrow B$ は，$A \to B$ と書いてもよいのですが，その写像が単射 (injection) であって，A が B の部分集合とみなされる，$A \subset B$ と見なしたい，という意味あいがあります．

問． 可展面の実用化について，具体的に有名なものがあれば教えてください．

答． 自動車などの車体 (ボディー) のデザインに使われるようです．可展面なので，伸び縮みさせる必要がないので簡単に工作できるからです．

問． 数学をするとよく寝られるのは何故ですか？

答． 数学をしてもしなくても私 (石川) はいつでもよく眠れます．では，ごきげんよう，さようなら．