ガウス写像の数学 (幾何学特論４・幾何学講義８) 質問の回答

No. ８ (２００２年１２月２０日) の分　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

問． 射影空間を考えるのはなぜですか？他の講義で「射影空間は compact になるのが利点」という話がありましたが，それでは compact なら何がよい性質なのでしょうか？

答． こんにちは．あけましておめでとうございます．さて回答ですが，なぜ射影空間を考えるか，それは，射影空間で考えた方が，射影双対 (projective duality) という概念が適用できて，developable surface (たとえば，cylinder, cone, tangent developable) について良くわかるからです．Gauss 曲率というのは，もちろん Euclid 計量を使って定まるわけですが,「Gauss 曲率が 0 である」という性質を，Gauss 写像の言葉に翻訳して,「Gauss 写像が退化する」ということで言い換えることができます．developable surface を射影幾何のレベルで「拡張された Gauss 写像 (射影双対) が退化するような曲面」として一般化して理解できるようになるからです．このように，よく考えると，射影空間を考えるのが自然だということがわかります．それはともかく，$\mathbf{R}^n$ のコンパクト化として $\mathbf{R}P^n$ が重要なのも確かです．たとえば，コンパクトだと連続関数に最大値が存在します．コンパクトだと手にとるようにわかります．

問． 射影空間について，多様体の本にのっている「原点を通る直線全体の空間」という描像と，位相幾何の本にのっている「４角形の辺を貼りあわせる」という描像との間の結びつきがピンときません．射影空間はどういうものと捉えるのがよいでしょうか？

答． 説明します．n 次元射影空間 $\mathbf{R}P^n = (\mathbf{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\})/(\mathbf{R} - \{0\})$ でしたね．これは,「原点を通る直線全体の空間」という描像です．(とくに，$n = 2$ のときが考えやすい)．原点を通る直線は，必ず単位球面 $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ と２点で交わるので，$\mathbf{R}P^n = S^n/\sim$ という表示もあります．ここで，$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}' \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ または $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}'$ です．つまり，射影空間は,「球面を対心点ごとに貼りあわせてできる空間」です．たとえば，$n = 2$ のとき，２次元射影空間は，２次元球面の対心点を貼りあわせる．たとえると，地球の表面上の北極と南極をくっつける．日本とブラジルをくっつける．すると，赤道以外の部分は，北半球で代表できるので，閉円板の境界を貼りあわせれば $\mathbf{R}P^2$ が得られることがわかります．これが,「４角形の辺を貼りあわせる」という描像に該当します．どちらか好きな方で理解しておいて，その後で，他の表現方法を勉強するとよいと思います．さて，それでは応用問題です．３次元射影空間 $\mathbf{R}P^3$ の描像を考えてみてください．

問． Gauss map g と extended Gauss map $\overline{g}$ について，$\mathrm{rank}_{(u,v)} g_* = \mathrm{rank}_{(u,v)} \overline{g}_*$ となる部分がよくわかりませんでした．

答． $g(u, v) = \boldsymbol{e}(u, v)$ で，$\overline{g} = (\boldsymbol{e}(u, v)\cdot\boldsymbol{p}(u, v), \boldsymbol{e}(u, v))$ なので，g_* の階数は，3×2 行列 $\begin{pmatrix} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \\ \zeta_u & \zeta_v \end{pmatrix}$ の階数であり，$\overline{g}_*$ の階数は，4×2 行列 $\begin{pmatrix} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \\ \zeta_u & \zeta_v \\ (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p})_u & (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p})_v \end{pmatrix}$ の階数になります．ここで，$S^2 \subset \mathbf{R}^3$ とか，$\mathbf{R}\times S^2 \subset \mathbf{R}^4$ などと見なしています．しかし，$(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p})_u = \boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{p} = x\xi_u + y\eta_u + z\eta_u$ であり，$(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p})_v = \boldsymbol{e}_v\cdot\boldsymbol{p} = x\xi_v + y\eta_v + z\eta_v$ なので，あとの方の行列の第４行は，上の３行の１次結合となり，２つの行列の階数が等しくなります．

問． $\mathrm{rank}_{(u,v)} g_*$ についてですが，下に，(u, v) と書いてあるのは何ですか？

答． 点 (u, v) における微分写像 $g_* : T_{(u,v)}U \to T_{g(u,v)}S^2$ の階数，という意味です．考えている点 (場所) を強調しました．

問． developable surface の特異点というのは，どの developable surface にも存在するのですか？

答． 存在しやすいのですが，存在しない場合もあります．たとえば，cylinder には $\mathbf{R}^3$ の中で，特異点はありません．しかし，cone や tangent developable には特異点が必ず存在します．tangent developable $\gamma(s) + t\gamma'(s)$ の場合は，$t = 0$ の部分，つまり，もとの空間曲線 $\gamma(s)$ に沿って特異点が現れています．

問． 「定理 (Hartman-Nirenberg) $M^2 \subset \mathbf{R}^3$ 可展面，閉集合 $\Rightarrow M$: cylinder」とありますが，平面はどうなるのだろうと疑問に思いました．

答． 説明不足でしたね．平面は cylinder の特別な場合なのです．cylinder (シリンダー) とは，平面曲線と $\mathbf{R}$ の直積 ($\subset \mathbf{R}^3$) というものです．その平面曲線が特に平面上の直線の場合，そのシリンダーは平面になります．

問． Hartman-Nirenberg の定理で，M が cuspidal edge surface の場合が除かれているのは，特異点をもっているからなのでしょうか？

答． その通りです．特異点の部分を取り除くと，可展面になりますが，閉集合ではなくなります．

問． tangent developable の分類のところで，局所座標系を選ぶときの t の次数はどのように導くのですか？

答． よい質問ですね．射影空間における局所アファイン座標 x_1, x_2, x_3 を選んで定めます．その座標系について $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ と書きますが，まず，t について展開したときの先頭の項の t に関する次数 (order) が，x_1, x_2, x_3 の順になるように並べかえます．(これも座標変換のうち)．次に，たとえば，$x_1(t)$ の order と $x_2(t)$ の order が同じ場合は，$x_2(t)$ から $x_1(t)$ の何倍かを引けば，$\mathrm{ord}(x_1(t)) < \mathrm{ord}(x_2(t))$ とできます．(これも座標変換)．そのようにしたときの，$x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ の order を a_1, a_2, a_3 とおいたわけです．

問． folded umbrella の定理で，何故 $\mathbf{A} = (1, 2, 4)$ なのかわかりません．

答． よい質問ですね．弧長パラメータ s (とアファイン座標系) を使って，$x_1(s) = as + \cdots, x_2(s) = bs^2 + \cdots, x_3(s) = cs^3 + ds^4 + \cdots$ と表したとき，$t = 0$ において，$a \neq 0 \Leftrightarrow \gamma$ が immersion, $b \neq 0 \Leftrightarrow \kappa \neq 0$, $c = 0 \Leftrightarrow \tau = 0$ さらに，$d \neq 0 \Leftrightarrow \tau' \neq 0$ が成り立つので,「immersed curve について $\kappa \neq 0, \tau = 0, \tau' \neq 0 \Leftrightarrow \gamma$ の $t = 0$ でのタイプが $(1,2,4)$」が成り立ちます．

問． tangent developable の分類と，$\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$ の関係についてですが，$\mathbf{A} = (1,2,3), \mathbf{A} = (1,2,4)$ の場合のような結果があらわれる a_1, a_2, a_3 の組は 8 種類しかないということですか？

答． そうです．詳しく書くと，leading term の次数である (a_1, a_2, a_3) だけで tangent developable の位相形が決まる，ということと，(a_1, a_2, a_3) の parity (偶奇) だけで tangent developable の位相形が決まる，という２つの主張を含んでいます．したがって，$2 \times 2 \times 2 = 8$ 個の位相形に分けれるということです．(正確には，そのうちの (偶，偶，偶) という場合は，分類からはずれ，残りの７クラスのうち，１つのクラスから２つの位相形が生じて，８種類になります)．

問． 可展面で，極小曲面となるものは平面以外ないのでしょうか？平均曲率一定曲面の場合はどうですか？

答． そうです．可展面の場合，Gauss 曲率が消えているので，主曲率の一方が 0 になります．ですから，平均曲率も 0 になるとすると，２つの主曲率の両方が 0 になります．つまり，平面 (の一部) になります．平均曲率一定の場合は，平面か，円筒 (本当のシリンダー) に限ります．

問． 写像 $\{\mathbf{R}^3$ 内の曲線 $\} \ni \gamma \mapsto (\gamma$ から得られる接線可展面 $) \in \{\mathbf{R}^3$ 内の曲面 $\}$ は単射なのでしょうか？

答． もとの曲線は，tangent developable の singular points の locus (の一部) として取り出せるので，単射です．

問． 可展面で閉集合なものは空間によって違ってくるわけですが，他の空間 (たとえば $S^3, H^3_+(-1)$) などでは知られているのでしょうか？$H^3_+(-1)$ での可展面をどう定義するのでしょうか？

答． よい質問ですね．異なる定義が２つありうると思います．一つは，Riemann 幾何的に「$H^3_+(-1)$ からの誘導計量に関して，ガウス曲率が 0 になる」という定義と，もう一つは,「extended Gauss map (Gauss indicatrix) が退化する」という定義です．前者については，いくつか結果があると思います．私 (石川) は，後者のものに特に興味があります．

問． 可展面は実用化し易い程単純な曲面なのでしょうか？cylinder や cone は上手くいきそうですが，tangent developable は捩じれているので，再現するのは技術的に難しそうに思えます．僕たちの身の回りはガウス曲率が 0 の物で溢れているのですか？

答． 溢れています．tangent developable (の滑らかな部分) も，紙や金属版などを伸び縮みさせずに捻れば作れるので，簡単に工作できます．このことは，可展面であることから保証されています．

問． ”normal developable” は研究されているのですか？space curve $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ に対して，$\boldsymbol{p}(s,t) = \gamma(s) + t\gamma'(s)$: tangent developable でしたが，$\boldsymbol{q}(s) = \gamma(s) + t\gamma''(s)$: normal developable はありますか？tangent developable　のように工学への応用はあるのでしょうか？

答． なるほど．直接の関係は不明ですが,「展直曲面 (rectifying developable)」と呼ばれるものがあります．$\gamma(s)$ と $\gamma'(s)$ で張られる平面を**接触平面** (osculating plane) と呼びますが，接触平面たちの包絡面として tangent developable をとらえることができます．関連して，$\gamma(s)$ と $\gamma''(s)$ で張られる平面を**展直平面**とよび，展直平面たちの包絡面を**展直曲面**とよびます．

問． 「C^∞ 級でつなげる」とありますが，どういうことですか？

答． 「つなげて C^∞ 級部分多様体にする」という意味です．

問． 先生が今行っている研究は，どういったものなのか知りたいのですが，できれば教えてもらえないでしょうか？

答． 「可展面の研究」をかれこれ１０年程続けています．もちろんそれ以外の研究テーマも並行して研究していて,「実代数多様体のトポロジーの研究」,「特異 Lagrange 部分多様体の研究」,「subRiemann 幾何学の研究」などが私 (石川) の主な研究テーマです．さらに，いま (２００３年１月現在) は,「写像空間の商空間の微分構造の研究」に取り組んでいます．

問． いくつか種類があることが予想されるけれど，実際にいくつあるかは当所未知数であるような対象についてリストアップする様な研究をされるときに，どのようにされますか？いくらでも例を考えられそうなものを仕分けるようなとき，僕はいつも「とりあえず手を使って」と思って例をどんどん作る方に動いてしまいます．先生の場合は，やはり手を動かしつつも全体が見えるような頭の使われ方をなさるのでしょうか？

答． そうですね，全体が見えるような手と頭の使い方をします．この質問は，一言で言うと,「分類 (classification)」についてですね．実は，私 (石川) の”業績”の多くは，分類問題の解決です．いろいろな対象の範囲を客観的に決めて，さらに分類の客観的な基準を定めて，分類を実行しています．といっても，すぐにうまくいくわけがないので，とりあえず分類してみようかな，と始めてみて，あまりうまくいかずに，具体例を見て考えたり，扱う対象の範囲を修正してみたり，基準を変更したりすることはよくあることです．何か意味のある分類をしたい，と試行錯誤を続けている毎日です．というわけで，具体例をどんどん作るのは非常に大切なことです．自信をもってください．その上で，自分が持っている知識・一般論を適用できる可能性をさぐることも大切になります．いわゆる「帰納 (きのう)」と「演繹 (えんえき)」のバランスをとって分類問題を両面攻撃することが必要なわけです．では今年もよろしく．