ガウス写像の数学 (幾何学特論４・幾何学講義８) 質問の回答

No. ７ (２００２年１２月１３日) の分　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

問． developable surface は parabolic point の集まりということですか？

答． こんにちは．さて回答ですが，そうです．曲面上の点は，その点において Gauss 曲率が正の時に楕円的，Gauss 曲率が負の時に双曲的，Gauss 曲率が零の時に放物的，と呼んだわけですが，可展面 (developable surface) では Gauss 曲率が恒等的に零なので，すべての点が放物的になります．

問． tangent developable が developable であるというのが良くわからかったです．稜線についてのみ developable だということですか？

答． "稜線" 以外の滑らかな部分が developable ($K \equiv 0$) です．ちなみに "稜線"の部分は曲面自体の特異点であり，Gauss 曲率が定義されていません．

問． developable という性質は local な性質ですか？

答． local な性質です．曲面上の１点 p での Gauss 曲率 $K(p)$ は，曲面の点 p の近傍の状態だけで定まります．したがって,「曲面 $M \subset \mathbf{R}^3$ が developable $\Leftrightarrow \forall p \in M, \exists U, U$ は M における p の近傍であり，U は developable 」が成り立ちます．

問． target が $\mathbf{R}^3$ だと closed な developable surface は無さそうですが，target を変えると存在しますか？

答． 良い質問ですね．閉曲面で developable であるものはありません．また，閉集合であるもの (properly embedded surface) で developable であるものは，cylinder に限ります．$\mathbf{R}^3$ 内の曲面ではなく，たとえば，S^3 や，$\mathbf{R}P^3$ 内の曲面に関しては,「developable という性質をどう一般化させて定義するか」が問題になります．これらのことは講義の中で説明する予定です．

問． $\mathbf{R}^3$ 内の oriented planes 全体は $\mathbf{R} \times S^2$ とみなせるとありましたが，"oriented" をはずすと何とみなせますか？$\mathbf{R}^2$ の直線だと，"oriented" は $S^1 \times \mathbf{R}$, そうでないとメビウスの帯だった記憶があります．$\mathbf{R}^3$ 内で oriented をはずすと，$\mathbf{R} \times \mathbf{R}P^2$ になるのかと考えましたが，$\mathbf{R}^2$ の場合のように何かねじれがつくのでしょうか？

答． 良い質問ですね．$\mathbf{R}P^2$ 上のねじれた $\mathbf{R}$-bundle になります．$\mathbf{R}^3$ 内の planes 全体の空間 Π は，$(\mathbf{R} \times S^2)/\sim$ です．ただし，$(c, \boldsymbol{v}), (c', \boldsymbol{v}') \in \mathbf{R} \times S^2$ について,「$(c, \boldsymbol{v}) \sim (c', \boldsymbol{v}') \Leftrightarrow (c, \boldsymbol{v}) = (c', \boldsymbol{v}')$ または $(c, \boldsymbol{v}) = (-c', -\boldsymbol{v}')$」 です．写像 $(c, \boldsymbol{v}) \mapsto (-c, -\boldsymbol{v})$ は $\mathbf{R} \times S^2$ の向きを保存するので，Π は orientable な３次元多様体です．また，自然は fibration $\pi : \Pi \to \mathbf{R}P^2$ がありますが，これは trivial ではありません．(付随する S^0-bundle は，２重被覆 $S^2 \to \mathbf{R}P^2$ です)．実は，$\mathbf{R}^3$ の plane は $\mathbf{R}P^3$ の projective plane とみなされるので，自然な単射 $\Pi \subset \mathbf{R}P^{3*}$ ($\mathbf{R}P^3$ の射影平面全体) があります．よく考えると，Π は，$\mathbf{R}P^{3*}$ から１点を取り去った多様体と微分同相になることがわかります．

問． 局所的に平面と等長的とありますが，どういうことですか？// イメージとしては，伸ばしたり曲げたりしないで，その形にできればいいという事で，紙を使って変形できるものだと思いました．// 可展面は平面にもどすことができるということなのですか？// 「局所的に平面と等長的」という意味は，長さをたもつ微分同相写像が局所的に存在する，ということなのですか？

答． そうです．一般に，距離空間 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ の間の全単射 $f : X \to Y$ が**等長写像** (isometry) とは，$d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x'), (x, x' \in X)$ が成り立つときに言います．そして等長写像が存在するとき，X と Y は**等長的** (isometric) であると言います．曲面 $M \subset \mathbf{R}^3$ が**局所的に平面と等長的**とは,「($\mathbf{R}^3$ の距離から誘導された M 上の距離について)，各点 $p \in M$ に対し，M における p の開近傍 U と，$\mathbf{R}^2$ の開集合 V があって，U と V が等長的である」ということです．

問． 結局，なぜ可展面というのかがわかりませんでした．

答． 可展面は「平面に展開できる曲面」と言う意味で名付けられています．

問． 今日の授業でやった可展面の他の例があったら教えてください．

答． cylinder と cone と tangent developable を組み合わせて，いろいろな可展面が構成されます．可展面は作りやすいので，たとえば，乗用車の車体のデザインに応用されているとのことです．

問． $\mathbf{R}^3$ 内の可展面の種類は３つしかないですが，次元が高くなると種類も増えるのでしょうか？

答． 増えます．しかし，どのような特異点が出てくるかについては完全にはわかっていないと思います．たとえば，$\mathbf{R}^4$ 内の可展超曲面の特異点の分類ですら完成していません．

問． $G/H \cong \mathbf{R}^3 \times S^2$(微分同相) になる根拠を知りたいです．// $G/H'' \cong \mathbf{R} \times S^2$ の所の補足説明 (e.g. 参考書 etc) をしてもらえると助かります．// 商空間についてもっと知りたいです．

答． たとえば，松島与三著「多様体入門」裳華房の p.225 の定理を見てください．(そこに書かれている

「微分同型」は「微分同相」と同じ意味です).

問． 微分同相という定義を知りたいです．// “同相” と “微分同相” の違いは何ですか？“$\cong$ は同相の記号だったような気がしますが…

答． 多様体 X, Y の間の全単射 $f : X \to Y$ が**微分同相写像** (diffeomorphism) であるとは，f とその逆写像 f^{-1} がともに可微分 (C^∞) 写像であるときに言います．微分同相写像が存在するとき，X と Y は**微分同相** (diffeomorphic) であると言います．同相 (homeomorphic, 位相同型とも言う) との違いは，同相写像 (omeomorphism) の場合は，f とその逆写像 f^{-1} が可微分でなくても，単に連続であればよい，ということです．記号 “$\cong$ は同相に限らず,「微分同相」「群同型」「ベクトル空間の同型」「集合の同型」など，なんらかの構造が同じであるという意味でいろいろな場面で使われています.

問． $H = \{(A, \mathbf{0}) \mid A\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_0\} \cong O(2)$ とありましたが，$H \cong SO(2)$ ではありませんか？

答． $O(2)$ です．講義で，回転と平行移動だけを強調していたので，誤解されやすかったかもしれませんが，もともと Euclid の運動群に反転 (行列式が -1 の直交変換) も入れているので，v_0 を固定し，平面の正規直交基底 v_1, v_2 を入れ替えるような変換も H に入ります.

問． アフィン変換は推移的と考えてよいのですか？

答． そうです．推移的です．定義に照らしてみればすぐわかります.

問． hight function や距離 2 乗関数も G-invariant で，これらが役に立つのは，G-invariant であることが関係があるという話があったと思いますが，例えば，何かある関数や，あるいは contact structure で役に立つものを作りたいと思ったときに，その関数などが G-invariant となるための条件 (十分条件や必要条件) はないでしょうか？

答． なるほど．でも残念ながら直接に定義通りに調べるしかないと思います.

問． $\mathbf{R}^3 \times S^2 \cong T^*\mathbf{R}^3|_{S^2}$ とみて，それの T^*S^2 へのへの射影として結びつけられましたが，このような，接触構造と symplectic 構造を互いに関係づけるような方法は，より一般の contact/symplectic manifold に対してもまた拡張されるのでしょうか？

答． 拡張されます.「contact 化」や「symplectic 化」と呼ばれている一般的な方法があります.

問． T^*S^2 上の symplectic structure も G-不変ですか？

答． そうです．ぜひ証明してみてください.

問． ナノテクノロジーの本を読んでいたら，カーボンナノチューブとカーボンナノコーンがまさしく可展面の cylinder と cone で驚いたことがあります．カーボンナノ tangent developable なるものを作ったら，何か秘めた性質があるかも知れません.

答． ほう，そうなの？ぜひ作って僕 (石川) に見せてください．運が良ければノーベル賞級の発見になりますね．(良いテーマを思いついても，何もしなければ，nothing です．逆に，何かすれば，世の中 (社会) に貢献できる可能性が零ではなくなりますね.

問．「数学用語総集編・日本語版」といった発行物はあるでしょうか？

答． あります.「数学辞典」(岩波書店) がそれにあたります．現在第 3 版ですが，来年には，第 4 版が出版される予定です.

問． 修士論文のテーマがまだはっきりと決まっていません．やってみたい方向はあるのですが，明確に “ココがやってみたい” というものが見つかっていません．希望はなるべくオリジナルなものをやりたいと考えてはいるのですが，どういうふうに調べていけばいいのかわかりません．誰も手をつけていないものがたくさん落ちていると聞くのですが，自分はそこの見極めみたいなものができません．やはり，深いところまで勉強しないと，そういうネタは落ちていないのでしょうか？テーマを決める時期としては，大体いつぐらいまでには決めておかないとまずいですか？

答． やってみたい方向がわかっているなら，立派です．その方向に向かって進めば良いです．自分の興味に従って，常識に囚われずに，でも，その自分の興味のありかた自体を深めるように，周囲の人の話も良く聞き，文献も良く読みながら生活してください．ところで，たとえ話で恐縮ですが，落ちていて誰も手をつけていないようなテーマは，多分，難しくてとても手に負えないか，つまらなくて誰も手をつけないのだと考えるのが妥当です．良い研究テーマというものは，問題意識をもって勉強 (生活) していくうちに，**そのうち天から降ってくる**ものだと思います．それを見逃さないように受け止められる力 (感性) を身につける努力を普段からしておくことが大切ですね．下を向いて歩かずに，上を向いて歩いていきましょう．そして，これだと思ったら，手を抜かすに打ち込んでください．というわけで，**研究テーマを決めるのは，研究したいテーマがみつかった時**ですね．それ以外にはあり得ません．ちなみに，関係ないですが，僕 (石川) はいまだに最終的な研究テーマを決めていません．かなりまずいですが，気にしていませんよ．ではまた.