ガウス写像の数学 (幾何学特論４・幾何学講義８) 質問の回答

No. ６ (２００２年１１月２９日) の分　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

問. $\mathbf{R}^3$ 上の Euclid 運動群について，明らかに写像で記述されていますが，写像がなかったという Euclid の時代には，どのように表現されていたのでしょうか？Euclid は，同じものを写像の言葉を使わずに定義したのでしょうか？それとも，Euclid が予想，あるいは概念的に使用したものを，後世の人達がスッキリまとめなおしたのでしょうか？

答. こんにちは．さて回答ですが，Euclid の幾何学原論にあるように，Euclid の幾何学は，公理的に表現されていました．集合とか写像などの概念はもちろん近代的なものなので使われていません (明記されていません)．どちらかというと，“Euclid が予想もしなかったことを後世の人達がまとめた”ということだと思います．ところで，ユークリッドは「幾何学に王道なし」と言ったそうですが，幾何学 (その当時は，学問そのものの意味でしたが) の王道は，実は「写像」という概念を使うことかもしれません．写像の言葉で書けば，われわれ庶民 (?) でも，高尚なユークリッド幾何が十分に理解できるようになるからです．

問. 半直積 $\rtimes$ とは何ですか？ふつうの直積との大きな違いは何ですか？

答. 群論の話題ですが，直積 $G \times G'$ の場合は，G の元と G' の元は可換です．半直積 $G \rtimes G'$ の場合は，G の元と G' の元は可換ではありません．これが大きな違いです．詳細については，群論の本を見てください．

問. $\widetilde{\alpha} = \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{p}$ と略記すると書いていますが，どういうことですか？

答. $\widetilde{\alpha} = \xi dx + \eta dy + \zeta dz$ という形に注目して，$\boldsymbol{v} = (\xi, \eta, \zeta), \boldsymbol{p} = (x, y, z)$, $d\boldsymbol{p} = (dx, dy, dz)$ とおいて，$\widetilde{\alpha} = \xi dx + \eta dy + \zeta dz = (\xi, \eta, \zeta) \cdot (dx, dy, dz) = \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{p}$ と表記したわけです．

問. $d(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x} = 0$ という変形と，$\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x} = \widetilde{j}^*\alpha$ になる理由が良くわかりません．

答. この前段階で，$\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{v} = 0$ と，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v} = c$ (定数) が成立していたことに注意しましょう．その上で，$d(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}) = d(x\xi + y\eta + z\zeta) = xd\xi + yd\eta + zd\zeta + \xi dx + \eta dy + \zeta dz = \boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x}$ (微分法則) が成り立つので，$0 = dc = 0 + \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x}$ から，$\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x} = 0$ がわかります．さらに，$\widetilde{j}^*\alpha$ は α の $\widetilde{j}$ による引き戻しであり，$\widetilde{j} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ なので，$\widetilde{j}^*\alpha = \xi dx + \eta dy + \zeta dz = \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x} = 0$ を得ます．

問. 講義で「$\pi_1 : \mathbf{R}^3 \times S^2 \to \mathbf{R}^3, (h, \pi_2) : \mathbf{R}^3 \times S^2 \to \mathbf{R} \times S^2$ はそれぞれルジャンドル・ファイブレーション」のところの証明がよく理解できませんでした．// 「ルジャンドル・ファイブレーション」の意味がよくわかりません．

答. ファイバーがすべてルジャンドル部分多様体であるようなファイブレーションをルジャンドル・ファイブレーション (Legendre fibration) と言います．つまり，Legendre fibration とは,「fiber がすべて Legendre 部分多様体である」という付加条件をみたす fibration のことです．講義では「fibration」の説明を省略したので，それを説明しておきましょう．可微分 (C^∞) 写像 $\pi : X \to B$ (X は m 次元多様体，B は n 次元多様体，$m \geq n$) が **fibration** とは,「ある $m - n$ 次元多様体 F があって，B の各点 $y_0 \in B$ に対し，y_0 の B での近傍 U と，微分同相写像 $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ が存在して，$\pi(x) = \rho_1(\varphi(x)), (x \in \pi^{-1}(U))$ が成り立つ」ことです．ここで，$\rho_1 : U \times F \to U$ は第１成分への射影です ($\rho_1(y, z) = y$)．すなわち，fibration とは，いわゆる “local triviality” をみたす写像のことです．たとえば，被覆空間 (covering space) は fibration の例です ($m = n$ の場合)．講義で扱っている $\pi_1 : \mathbf{R}^3 \times S^2 \to \mathbf{R}^3$ や，$(h, \pi_2) : \mathbf{R}^3 \times S^2 \to \mathbf{R} \times S^2$ が fibration であることを実際に確かめてみてください．

問. ルジャンドルリフトについてもコメントしてください．

答. ルジャンドルはめ込みであるようなリフトのことです．

問. π_1 のファイバーと，(h, π_2) のファイバーがそれぞれ横断的に交わる，ということは成り立たないと思うのですが，如何でしょうか？それとも成り立つでしょうか？

答. 成り立ちません．一般に，多様体 M 内の部分多様体 A と B が点 $x_0 \in M$ で**横断的に交わる**とは，$T_{x_0}A + T_{x_0}B = T_{x_0}M$ が成り立つことを言います．したがって，A と B が横断的に交わるとすると，$\dim A + \dim B \geq \dim M$ となります．π_1 の fiber は２次元で，(h, π_2) の fiber も２次元で，$\dim(\mathbf{R}^3 \times S^2) = 5$ なので，$2 + 2 < 5$ だから，横断的に交わることはできません．(ただし，**接しない** ($T_{x_0}A \cap T_{x_0}B = \{0\}$) ということは成り立ちます)．

問. 記号のことなんですが，$\mathbf{R}^3 \times S^2 \to \mathbf{R} \times S^2$ への写像を (h, π_2) のように書いているのはなぜですか？

答. 一般的な記法です．$h : \mathbf{R}^3 \times S^2 \to \mathbf{R}, h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}$ であり，$\pi_2 : \mathbf{R}^3 \times S^2 \to S^2, \pi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ でしたが，一般に，写像 $h : X \to A$ と $k : X \to B$ (定義域が共通) が与えられたとき，写像 $(h, k) : X \to A \times B$

が，$(h,k)(x) = (h(x),k(x))$ で定まります．だから，$(h,\pi_2) : \mathbf{R}^3 \times S^2 \to \mathbf{R} \times S^2$ は，$(h,\pi_2)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = (h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}),\pi_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$ で定まります．

問． アファイン幾何で，

$$\pi_1 : \mathbf{R}^{2n+1} \to \mathbf{R}^{n+1}, \pi(x_1,\ldots,x_n,z,y_1,\ldots,y_n) = (x_1,\ldots,x_n,z),$$

$$\pi_2 : \mathbf{R}^{2n+1} \to \mathbf{R}^{n+1}, \pi(x_1,\ldots,x_n,z,y_1,\ldots,y_n) = (y_1,\ldots,y_n,\sum_{i=1}^n y_i x_i - z)$$

の $\sum_{i=1}^n y_i x_i - z$ の部分は，z でないのはどういうことですか？

答． $\sum_{i=1}^n y_i x_i - z$ の部分を，単に z にしてしまうと，π_2 が Legendre fibration にならないからです．$\mathbf{R}^{2n+1}$ 上の接触形式は $\alpha = dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i$ なので，π_1 の fiber が Legendre 部分多様体になることはわかります．さらに，これを書き換えると，$\alpha = d(z - \sum_{i=1}^n y_i x_i) + \sum_{i=1}^n x_i dy_i = -(d(\sum_{i=1}^n y_i x_i - z) - \sum_{i=1}^n x_i dy_i)$ となり，π_2 を上のように定めてあげれば，π_2 も Legendre 部分多様体になります．

問． global な接触形式とそうでない接触形式というものがあるそうですが，global でない場合は，その obstruction のようなものは考えるのですか？

答． 良い質問ですね．考えられます．接触構造 $D \subset TM$ の normal bundle TM/D が向き付け可能であることが，global な接触形式がとれる必要十分条件です．つまり，obstruction は $w_1(TM/D) \in H^1(M,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ (first Stiefel-Whitney class) です．

問． なぜ dual projective space $\mathbf{R}P^{n*}$ の元を $[y]$ と書くのですか？$[y]$ は $[y] : \mathbf{R}P^n \to \mathbf{R}$ という写像ですよね？$x \cdot y = 0$ と計算できるということは，$y \in \mathbf{R}^{n+1}$ な訳だから，$[y]$ と書かれると，どうしても $[y] \in \mathbf{R}P^n$ と考えてしまいます．

答． もっともな質問ですが，$\mathbf{R}P^{n*}$ はベクトル空間ではなく，射影空間 (多様体) であり，双対ベクトル空間 $(\mathbf{R}^{n+1})^*$ とは違う意味で，”$*$” を付けています．定義は，$\mathbf{R}P^{n*} = (\mathbf{R}^{n+1^*} - \{\mathbf{0}\})/(\mathbf{R} - \{0\})$ です．$(\mathbf{R}^{n+1})^*$ から作った射影空間という意味で $*$ を付けているだけのことです．ちなみに，$\mathbf{R}P^n = (\mathbf{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\})/(\mathbf{R} - \{0\})$ でした．ですから，$[y] \in \mathbf{R}P^{n*}$ という場合，$y \in (\mathbf{R}^{n+1})^*$ (余ベクトル) であり，$[y]$ は，y の同値類という意味です．

問． これまでの接触幾何の話はすべて有限次元空間での話なのですか？接触形式 $\alpha = dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i$ についても，$\alpha = dz - \sum_{i=1}^\infty y_i dx_i$ となるような場合はどうなるのでしょうか？

答． すべて有限次元の話です．なるほど．無限次元の場合を考えるのは，数学の重要な発展をうながすきっかけになることもあります．数学の歴史を見てもそうです．(安直すぎる一般化も多くありますが．) 質問にある $\alpha = dz - \sum_{i=1}^\infty y_i dx_i$ を考えるのは良いセンスだと思います．ただし，この場合の収束性 (あるいは，$\mathbf{R}^\infty$ をどう考えるか) が問題ですね．$\mathbf{R}^3 \subset \mathbf{R}^5 \subset \mathbf{R}^7 \subset \cdots \subset \mathbf{R}^{2n+1} \subset \mathbf{R}^{2n+3} \subset \cdots$ という系列に関する inductive limit (帰納的極限) について考えると，理論を作るのは比較的手の届くことだと思います．無限次元のシンプレクティック多様体や接触多様体は，個々の事例では研究されていますが，一般論はまだないようです．

問． ミンコフスキー幾何で，$\mathbf{R}^{n+1}_r$ を $\mathbf{C}^{n+1}_r$ について考えることはできますか？$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ なので，うまくできない気もします．

答． そうですね．できません．複素数上では対称双線形形式 (2 次形式) の符号数に意味がなくなるからです．

問． 先生の出身は北海道ですか？

答． 違います．数学の星から来ました．

問． 類似物の説明で，それぞれの幾何学が $B \leftarrow A \rightarrow C$ という形をしていましたが，これは B は (A を通して) C と dual という感じでしょうか？そうならば，Euclid の場合は授業でやっていますが，その他の幾何の場合，B の中にある研究対象物 (submanifold) と C の中にできる dual な submanifold はどういう対応なのでしょうか？

答． そうです．dual という感じです．ただし，具体的な対応関係は，個々の幾何学によるので，それぞれ調べてみる必要があります．このとき，統一的な観点から物を調べると，いままで知られていなかった問題提起，概念の設定ができる場合もあります．「高い山から谷底見れば，瓜やなすびの花盛り」．

問． n 次元 Euclid 空間の曲線の特異点の分類はありますか？

答． 微分同相で分類する理論はあります．ただし，特異点を持つ曲線の微分幾何は，あまり研究されていないと思います．(特異点のない曲線を，特異点論を応用して調べる研究はありますが)．たとえば，フレネー・セレの公式が，曲線に特異点がある場合にはどうなるか，などといった問題などは興味深いです．ではまた．