ガウス写像の数学 (幾何学特論４・幾何学講義８) 質問の回答

No. ５ (２００２年１１月１５日) の分　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

問． シンプレクティック幾何の概念は，解析力学の正準方程式 (symplectic form) を考えることにより，(ある程度) 自然に出てくるものだと (現時点で) 思っていますが，接触幾何の起源はどのようなものなのでしょうか？常微分方程式のための応用として初めは考えられたのでしょうか？それとも，解析力学などの物理とも関連していたのでしょうか？偶数次元と奇数次元の違いはどのように現れてくるのでしょうか？

答． こんにちは．シンプレクティック幾何と接触幾何の明白な相違点は，確かに偶数次元と奇数次元の違いです．それは，$\mathbf{R}^{2n}$ と $\mathbf{R}^{2n+1}$ の違い，象徴的な表現をすると，関数 $z = z(q_1, \ldots, q_n)$ の１階偏微分たち $p_i = \dfrac{\partial z}{\partial q_i}$ を独立変数とみなし，$(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ 空間 ($2n$ 次元) を考えるのがシンプレクティック幾何で，さらに，関数値 z も独立変数とみなして，$(q_1, \ldots, q_n, z, p_1, \ldots, p_n)$ 空間 ($2n+1$ 次元) を考えるのが接触幾何であると言えます．接触幾何はシンプレクティック幾何と同様に，微分方程式 (常微分方程式や偏微分方程式) を幾何的に理解するために考えられたと思います．また，微分方程式は，もともと物理と密接に関連して研究されたものなので，接触幾何も物理とも当然関連します．歴史的には，多分，リー (Lie) による「接触変換」の研究が接触幾何の始まりです．Lie は，微分方程式の分類問題のために，通常の座標変換よりも一般的な変換を考えたのですが，それが接触変換と呼ばれるものです．ところで，Lie の夢は「微分方程式のガロア (Galois) 理論を作ること」だったそうです．それはともかく，数学は目的限定型の学問ではありません．数学は汎用型の学問です．つまり，何か一つの目的のためだけに研究されている学問とは性質が異なります．直接の目的以外にも有効に利用されるように作られている，ということが数学の特長です．接触幾何も例外ではありません．接触幾何はいろいろな分野で役立つ可能性を秘めていると思います．ただし，物理学者は接触幾何をまだ理解できないので，使わないという傾向も確かにあります．(というと言い過ぎでしょうか．)

問． 接触幾何は「ガウス写像」の背後にあるものとされていましたが，歴史的に，接触幾何の方が「ガウス写像」よりも先に考えられていたのでしょうか？それとも，ガウス写像のうらづけとして接触幾何が考えられたのでしょうか？

答． 歴史的には，ガウス写像の方が古いと思います．かといって，接触幾何がガウス写像の裏付けを与えるという目的で考えられたものということでもありません．接触幾何は，いろいろな数学の枠組みを理解するために，徐々に考えられてきたものです．それがガウス写像の背後にも (不思議にも!?) 横たわっていた，ということです．

問． 接触多様体である，というのは，$\alpha = 0$ となる微分 1-形式が存在する，ということで良いのでしょうか？

答． 残念ながら違います．接触多様体とは「$d\alpha$ が $D = \{\alpha = 0\}$ 上で非退化になるような微分 1-形式 α が与えられている多様体である」と理解してください．

問． $D = \{\alpha = 0\}$ の意味がよくわかりません．

答． 失礼しました．$D = \{v \in TM \mid \alpha(v) = 0\} \subset TM$ という意味の略記です．丁度，$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ を単に $\{x^2 + y^2 = 1\}$ と書くようなものでした．(この過去形は，北海道で頻繁に使用される丁寧表現)．

問． D は余次元１の部分ベクトル束とありますが，余次元とは何ですか？

答． 「余次元 = 全体の次元 − 次元」です．つまり，余分な自由度です．たとえば，n 次元空間 $\mathbf{R}^n$ 内の $n-1$ 次元部分空間 $\mathbf{R}^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ の余次元は 1 です．

問． D を余次元１の部分ベクトル束とし，$d\alpha = -\sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ は，D 上非退化であるという証明がよくわかりません．具体的には，$(d\alpha)(v, v') = \sum_{i=1}^n (-a_i b'_i + a'_i b_i) = 0$ の変形がよくわかりません．

答． (p, q) 平面 (２次元) の場合に $(dp \wedge dq)(v, v')$ がどうなるか説明します．(それが分かれば，一般の場合が類推できると思います)．ここで，(p, q) は $\mathbf{R}^2$ の座標で，$v = (a, b), v' = (a', b')$ は２次元のベクトルです．このとき，$(dp \wedge dq)(v, v') = \begin{vmatrix} dp(v) & dp(v') \\ dq(v) & dq(v') \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$ が定義です．

問． $T\mathbf{R}^{2n+1}$ が３次元的に表される理由がわかりません．

答． $T\mathbf{R}^{2n+1} \cong \mathbf{R}^{4n+2}$ で次元が極めて大きいのですが，図で表すときは，３次元的にしか表しようがないので，仕方なく表しているわけです．あとは，皆さんの想像力に期待するしかありません．

問． (M, D) についてですが，接触構造 D は $T\mathbf{R}^{2n+1}$ 内の余次元１の部分ベクトル束であると定義していましたが，ファイバーがベクトル空間に同型でなければ，何かおかしなことが起こるのですか？

答． 単に，接触構造 D は $T\mathbf{R}^{2n+1}$ 内の余次元１の部分ベクトル束であると定義しているわけではありません．そのようなもののうち「非退化」なものとして定義しています．いろいろな具体例から抽象化されました．ちなみに，$T\mathbf{R}^{2n+1}$ のファイバーはいつでもベクトル空間に同型です．

問． $(2n+1)$ 次元多様体 $M = P(T^*\mathbf{R}^{n+1})$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ の接触要素全体の空間とみなされるとありますが，この意味がわかりません．// 接触要素とはどのようなものかわかりにくいです．// なぜ，$\mathbf{R}^{n+1}$ の接空間の超平面を contact 要素と呼ぶのでしょうか？

答． 簡単のために，平面 $\mathbf{R}^2$ で考えましょう．$\mathbf{R}^2$ の点 $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ での接触要素とは，点 (x, y) を通る直線のことです．なんだそんなことか，でも，どうしてそれが接触要素なのか．そのことを納得するために，平面曲線を考えてみましょう．平面曲線上の各点 (x, y) に対し，接線と呼ばれる直線が定まりますね．この接線を，$\mathbf{R}^2$ の (x, y) での接平面 $T_{(x,y)}\mathbf{R}^2$ の１次元部分ベクトル空間と考えます．これが “接触要素”です．つまり，曲線上の各点に対し，接触要素が定まるわけです．平面上の接触要素とは，言い換えれば，曲線の接線となるような “要素” のことです．潜在的に曲線の接線になるような要素，という意味で，直線を昔から「接触要素」と呼んだのだと思います．さて，接線を考えるということは，微分を考えることであり，御存じのように，微分によって曲線の曲がり具合，曲率も自由自在に調べられます．この過程で，接触要素という概念が歴史的に重要になりました．同様に，これを一般次元で考えます．$\mathbf{R}^{n+1}$ の超曲面 M (n 次元部分多様体) について，各点 $x \in \mathbf{R}^{n+1}$ での接空間 T_xM は $T_x\mathbf{R}^{n+1}$ の n 次元部分ベクトル空間なので，潜在的に超曲面の接空間になるような “要素”，$\mathbf{R}^{n+1}$ のある点 x での接ベクトル空間 $T_x\mathbf{R}^{n+1}$ ある n 次元部分ベクトル空間 $c \in T_x\mathbf{R}^{n+1}$ のことを接触要素と呼びます．したがって，$\{c \in T_x\mathbf{R}^{n+1} \mid c \subset T_x\mathbf{R}^{n+1} n \text{ 次元部分ベクトル空間}, x \in \mathbf{R}^{n+1}\}$ が接触要素からなる空間となります．これが，$P(T^*\mathbf{R}^{n+1})$ です．そして，講義で定義した意味の「接触多様体」になります．

問． $c \in P(T^*\mathbf{R}^{n+1})$ に対して，$D_c := (\pi_*)^{-1}(c)$ とおくと，$(P(T^*\mathbf{R}^{n+1}), D)$ は contact manifold になるということですが，D とは何でしょうか？$D(c) = D_c$ という意味ですか？

答． そうです．$D = \cup_{c \in P(T^*\mathbf{R}^{n+1})} D_c$ です．

問． $D_c := (\pi_*)^{-1}(c)$ の π_* は何ですか？

答． 自然な射影 $\pi : P(T^*\mathbf{R}^{n+1}) \to \mathbf{R}^{n+1}$ の微分写像のことです．(微分写像については，この講義でも何度も出てきていますが，多様体の教科書も参考にしてください．

問． 自然な射影と射影化の違いを教えて下さい．多様体の本では，$\pi : TM \to M$: 自然な射影，をよく見かけますが，射影化の射影と同じものですか？

答． 違うものです．同音異義語と思ってください．射影化とは，$\mathbf{R}^{n+1}$ から「射影空間」を作るという意味で，射影空間は,「射影幾何」に関連する用語です．そして，射影幾何は，通常の意味の「射影」,「立体射影」とか,「正射影」とか,「原点からの射影」などと関連して，はるか昔から研究されているのです．このように長い歴史的な紆余曲折があるので，それらのことは忘れて，別の意味で使っていると考えた方が簡単です．

問． できれば，$(\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\})/(\mathbf{R} \setminus \{0\}) = \mathbf{R}P^n = P(\mathbf{R}^{n+1})$ が成り立つのも教えてください．

答． n 次元実射影空間 $\mathbf{R}P^n$ ($P(\mathbf{R}^{n+1})$ とも表す) は，$\mathbf{R}^{n+1}$ の１次元部分ベクトル空間 (原点を通る直線) の全体の空間として定義されます．具体的に，$\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ をある同値関係で割って得られる商空間と考えます．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ について，$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \exists c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}; \boldsymbol{x} = c\boldsymbol{y}$ と定義します．これは同値関係になり，この同値関係に関する同値類の全体の集合が $\mathbf{R}P^n$ です．これが，n 次元実射影空間の具体的な定義です．

問． 接触多様体と n 次接触 (n 回までの微分が等しい) との関連性はあるのですか？接触多様体の方は，多様体に (接触) 構造が入ることで，n 次接触は,「２つのものが接している」というイメージですか？

答． その通りです．同音異義語です．ただし，接触幾何は,「１次の接触」を幾何的に研究するために生まれたものです．さらに「高階の接触幾何」というものがあり，それは，高次の接触を幾何的に調べるものとみることができます．

問． ルジャンドル部分多様体の定義あたりの説明を聞き逃してしまいました．定義内の M には接触多様体という仮定は含まれていないのでしょうか？

答． そうです．含まれています．接触多様体の部分多様体に対してのみ，ルジャンドル部分多様体かそうでないかが定まります．

問． ルジャンドル部分多様体の定義のところで,「$\forall x \in L, T_xL \subset D_x (\Leftrightarrow \alpha|_L = 0)$」とありましたが，(　) の中が，どのようにして同値になるのかイメージがわきにくいので，説明をお願いします．

答． 説明します．$\forall x \in L, T_xL \subset D_x \Leftrightarrow \forall x \in L, \forall v \in T_xL; v \in D_x \Leftrightarrow \forall x \in L, \forall v \in T_xL; \alpha(v) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in L, \forall v \in T_xL; (\alpha|_L)(v) = 0 \Leftrightarrow \alpha|_L = 0$ ということから導くことができます．ここで，D というものが，α が 0 になるようなベクトルの集まりであるということを使っています．

問． $\mathbf{R}^3 \times S^2 = T^*\mathbf{R}^3|_{S^2} \xrightarrow[\Pi]{} T^*S^2$ の Π は一体何でしょうか？矢印は写像の矢印ではないですよね．

答． 写像の矢印です．写像 Π は，各点 $\boldsymbol{v} \in S^2$ に対して，制限写像 (inclusion の dual) $T^*_{\boldsymbol{v}}\mathbf{R}^3 \to T^*_{\boldsymbol{v}}S^2$ により定まる写像です．

問． 講義で，$\Pi \circ \tilde{i} : U \to T^*S^2$ は $L(F)$ ($L(F)(u, v, \boldsymbol{v}) = (d_{\boldsymbol{v}}F, \boldsymbol{v})$, $d_{\boldsymbol{v}}F(\eta) = \eta(F(u, v, \cdot), \eta \in T^*_{\boldsymbol{v}}S^2)$ に等しいとありましたが，これは $\mathbf{R}^3 \times S^2$ の接触構造の制限と関係あるのでしょうか？

答． 関係があります．接触形式の外微分の制限が，シンプレクティック構造を与えます．

問． 「典型的」な特異点というのは，どういう点で典型的なのでしょうか？

答． 特異点のある分類リスト (折り目とカスプ) があって，すべての特異点が，そのような特異点のみを持つようなものに近似可能であるということを，講義で紹介しました．典型的な特異点という意味は，ここでは，そのような特異点の特長そのものを形容しています．頻繁に現れるような特異点を典型的，めったに現れないような特異点を典型的でない，と表現していると考えてください．

問． 今回の回答 (No.5) の最後のものを読んで，思わず読み入ってしまいました．幾何にこのような機能がある，代数や解析にはこうだ，そして数学者は，それらを有機的に用い，研究を満足していくのだ，ということを読んだ瞬間，数学の見え方がガラリとかわりました．

答． そうですか．読んでくれてありがとう．ところで，感動できる，新しい見方・考え方を身につけられるのは，若さの特権です．その上で，皆さんは心得ていると思いますが，人の言うことは良く聞きつつ，鵜呑みにはしないで，自分で良く考えて判断していくことが大切です．自分で考えることを繰り返していくことが，結局自信につながっていくと思います．孔子曰く「学びて思わざれば即ちくらし (dark)，思いて学ばざれば即ちあやうし (dangerous)」．

問． 数学を勉強する上での “強さ” とは何ですか？最近思うのですが，人としての強さは “信じる力” だと思うのです．何を信じるかは人それぞれですが，数学をやっていて，どこかで自分のやっていることに疑問をもったとき (信じることができなくなったとき) は，先生はどうしますか？または，そんな事は考えないのですか？ある偉大な数学者が，悩んでいる暇があったら勉強しろ!!と，言っていましたが．

答． 悩みながら勉強すると良いと思います．私 (石川) はいつも自分のしていることに疑問をもち，悩んでいます．なるほど，何かを信じるということは大切かもしれません．ある意味,「信じる」ということは「惚れる」ということですね．それがなければ何事も始まりません．しかし一方では，悩むことが学ぶことにつながります．逆説的な表現になるかもしれませんが,「信じない力」も大事です．すべての科学は，疑うことから始まるからです．どんな偉い人が言ったことでも，それは本当に正しいかどうかは，つねに検証してみないといけない，という態度が科学では大切です．信じないで，どんどん疑いましょう．あるいは,「疑う」と表現するよりも，研究対象をもっと “とことん” 知りたくて，こういう場合はどうか，こうするとどうなるのか，などと徹底的に調べ尽すことだ，と言ったほうが良いかもしれません．ともかく，一番つまらないのは，中途半端な研究です．人々が信じて疑わないことを，それは本当に正しいのだろうかと疑問をもつように心掛けてください．とはいうものの，人間は弱いものです．私 (石川) も弱い人間です．実際は，いろいろ信じて生きています．いろいろな物や人に頼ってなんとか生きています.「信じる」という行為は，どうも，人間の弱さからくるものではないかな，とも思います．仕方がない．とはいえ，むやみやたらに “他者” に依存し続けるということは，健全なことではありません．人間関係でも,「信じていたのに裏切られた」などとセリフを言わないで，いつでもその関係を問い直すことができる,「惚れ直すことができる」ということが，実は信じ続けるということなのでしょうね．日常生活でも，研究生活でも，常に自分が努力を続けなければいけない，それが,「悩みながら勉強する」という意味です．ではまた．