ガウス写像の数学 (幾何学特論４・幾何学講義８) 質問の回答

No. ４ (２００２年１０月２５日) の分　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

問. 特異点が安定である，とはどのような状態をいうのでしょうか？// 特異点が安定であるといわれたのですが，どのように "安定" なのかよくわかりません. // 一般的には，どのようなガウス写像の特異点が知られているのですか？また，ガウス写像の特異点は，どの程度調べられているのですか？// (1) 非特異，(2) 折り目 (3) 尖点，以外にも，安定でない特異点であれば，たくさんあると思うのですが，(安定であってもあるかもしれませんが)，安定でない特異点の例はありますか？または，そのような特異点は，数学的にはつまらないもので，あまり研究対象にもならないのでしょうか？

答. こんにちは．安定であるというのは，この場合，その曲面を微小に摂動しても，そのガウス写像の特異点のタイプ (同型類) が生き残るという意味です．たとえば，平面を曲面と見てガウス写像を考えると，それは定値写像になりますが，この状態は，安定ではありません．というのは，その平面を少し凸凹に摂動すれば，ガウス写像は定値写像でなくなるからです．安定なものは，(1) 非特異，(2) 折り目 (3) 尖点，に限ります．安定でない特異点はたくさんあります．(数えたらきりがないです)．その安定でない特異点にも，研究対象になるもの (出現する頻度が比較的高く，理論的に扱えるもの) と，つまらない (というか，複雑すぎて手に負えない，しかも出現する頻度が極めて低い) ものがあります．たとえば，時間的に変化する曲面のガウス写像に瞬間的に生じるような特異点は，十分研究する価値があります．２つの離れたカスプの先端が時間とともに合流して生じるような，より複雑な特異点がその例です．

問. $\boldsymbol{p}(u,v) : U \to \mathbf{R}^3$ 曲面 (immersion) は Gauss 写像 $g : U \to S^2$ が次の特異点だけをもつような曲面によって <u>近似</u> できるとありますが，近似ということは正確におき換えることができないということなのですか？近似ということは，前の曲面の情報がいくつか落ちて，そしてその誤差みたいなものはあっても，問題ないものなのですか？// 定理にある "曲面によって近似できる" がよく分かっていないように思います.

答. 「近似」という意味は,「連続関数を多項式で近似する」「C^∞ 級関数を多項式で近似する」「曲面を多面体で近似する」などというような使用法と同じ意味あいで使っています．(正確には，はめ込みの空間に，C^∞-位相という位相を入れて，その位相の言葉で定式化できます)．実際，すべての曲面のガウス写像の特異点の標準形を求めるということは不可能であり，また，調べてたとしても，役に立つとは限らないので，まず典型的に現れるような特異点を調べようという発想です．ポアンカレの有名な著書「科学と方法」(岩波文庫) には，科学者の扱うべき対象に関する記述があり，まず調べるべきなのは，起こる頻度の高い現象である，というようなことが書いてあります．よく起こることは，調べてみる価値があります．ところで，特異点を調べるというと，何か変わった現象を勝手に見つけてきて，趣味的にそれを調べる，というふうに誤解されるかもしれませんが，そうではなく,「しばしば生じる現象，そこに普遍的に現れるような特異点を調べる」ということが当然優先されます．たとえ話ですが，人文科学で人間の行動を研究する場合，誰か特定の個人の癖を研究するのではなく，(それも面白いかもしれませんが)，大多数の人が，ある状況のもとで，必ずとってしまうような行動，典型的な行動，に注目するのが第一なわけですね．それと同じことです.

問. 今回の講義で，Gauss 写像の特異点は，2-type しかないと言っていましたが，それぞれは前回の講議で出てきた Lagrangian immersion $f : U \to T^*S^2$ では，どのように見えるのですか？または，そのような点に対応しているのか知りたいです．immersion なので，特異点になっていないので見えないのでしょうか？

答. immersion ですが，ファイブレーション $\pi : T^*S^2 \to S^2$ との位置関係が特異です．$\pi : T^*S^2$ のファイバーと２次の接触あるいは３次の接触をしています.

問. $\widetilde{j}$ の定義の $(\boldsymbol{v}_u, \boldsymbol{v}_v)$ が１次独立であるという条件は,「一意的に定まる」という部分にきいていると思ってよいのでしょうか？

答. その通りです．より詳しく書くと，$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = 1$ なので，$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_u = 0, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_v = 0$，つまり，$\boldsymbol{v}$ は，$\boldsymbol{v}_u, \boldsymbol{v}_v$ 両方と直交します．したがって，$\boldsymbol{v}_u, \boldsymbol{v}_v$ が１次独立ということから，$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_u, \boldsymbol{v}_v$ は１次独立になることがわかります．このことから，３元連立１次方程式 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} = c, \boldsymbol{v}_u \cdot \boldsymbol{x} = c_u, \boldsymbol{v}_v \cdot \boldsymbol{x} = c_v$ がただ１つの解 $\boldsymbol{x}$ を持ちます.

問. $\widetilde{i}, \widetilde{j}$ もルジャンドルはめ込みですが，$\widetilde{i}, \widetilde{j}$ の他に $U \to \mathbf{R}^3 \times S^2$ でルジャンドルはめ込みを具体的に作ることはできますか？できるのならば，実際に具体例をいくつか教えてください.

答. 今回の講義のテーマと関係するのですが，この場合，すべてのラグランジュはめ込みは，$\mathbf{R}^3$ のある種の曲面 (曲面自体の若干の特異点は許す) のリフトとして得られることが知られています．ここでは，$i : U \to \mathbf{R}^3$ を具体的に指定した場合の，$\widetilde{i} : U \to \mathbf{R}^3 \times S^2$ を書いてみます．たとえば，$U = \mathbf{R}^2, i : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3, i(u,v) = (u,v,0)$ とします．このとき，$\boldsymbol{e}(u,v) = (0,0,1)$ となります．したがって，$\widetilde{i} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 \times S^2$ は，$\widetilde{i}(u,v) = ((u,v,0),(0,0,1))$ となります.

問. リフトについて確認してみたく思います.

答. 数学的な定義は,「写像 $f : X \to Y$ の写像 $\varphi : Z \to Y$ についての**リフト**とは，写像 $\widetilde{f} : X \to Z$ であって，$\varphi \circ \widetilde{f} = f$ となるもの」です．これだけです．単純です．φ が被覆空間であろうが，ファイバー束であろうが，構いません．図式で理解するのが良いと思います.

問. 双対性についての解説をお願いします.

答. 双対性の原点は，射影幾何にあります．そして，その基本は (この回答書で何度も触れた) 線形代数の双対ベクトル空間にあります．V をベクトル空間とするとき，$V^* := \{\alpha \mid \alpha : V \to \mathbf{R} \text{ linear}\}$ を V の双対ベ

クトル空間と呼びますが，それは双対性に関係するからです．$P(V) := (V - \{0\})/(\mathbf{R} - \{0\})$ を V から定義される射影空間，$P(V^*) := (V^* - \{0\})/(\mathbf{R} - \{0\})$ を V^* から定義される射影空間とすると，$P(V)$ の点と，$P(V^*)$ の超平面が，$[\boldsymbol{v}] \leftrightarrow \{[\alpha] \in P(V^*) \mid \alpha(\boldsymbol{v}) = 0\}$ によって対応します．また，$P(V)$ の超平面と，$P(V^*)$ の点が，$\{\boldsymbol{w} \in P(V) \mid \beta(\boldsymbol{w}) = 0\} \leftrightarrow \beta \in P(V^*)$ によって対応します．これが，歴史的に最初に認識された双対性です．詳しいことは，いずれ講義中に説明したいと思っています．ところで，突然ですが，奈良の東大寺の三月堂にある日光菩薩と月光 (がっこう) 菩薩を知っていますか？僕 (石川) は，機会があるたびに，東大寺を訪れて，三月堂の中で，ボーッと菩薩像を眺めるが好きです．それはともかく，日光菩薩と月光菩薩は「双対」です．(良く見ると違いがわかるが，どちらがどちらであるかは，特定できない，でもいつも一緒に行動している，といった感じでしょうか)．

問． 一般のルジャンドル immersion があったとき，これと同じように，duality というか，dual map を定義することは出来るのでしょうか？

答． double Legendre fibrations $M_1^{n+1} \leftarrow W^{2n+1} \rightarrow M_2^{n+1}$ があると，immersion $i : N \rightarrow M_1$ の dual が，i の Legendre lifting $\widetilde{i} : N \rightarrow W$ と $W^{2n+1} \rightarrow M_2^{n+1}$ の合成 $N \rightarrow M_2$ によって定まります．講義では，$\mathbf{R}^3 \leftarrow \mathbf{R}^3 \times S^2 \rightarrow \mathbf{R} \times S^2$ の場合を説明しているわけです．

問． ルジャンドルはめこみは，はめこむ先が，$\mathbf{R}^3 \times S^2$ となっていますが，その時点で図形的にどんな変化が起こるものか，分かりにくいと思ったのですが，どうなんでしょうか？

答． 確かに，行き先が５次元空間なので直感的に想像しにくいと思いますが，理論的にはよくわかります．(慣れれば，次元が高くても苦にならなくなります)．

問． ラグランジュはめ込みとルジャンドルはめ込みの大きな違いは何なのでしょうか？

答． 行き先が，シンプレクティック多様体であるか，接触多様体であるか，というのが最も大きな違いです．

問． Menn's surface $\boldsymbol{p}(u, v) = (u, v, u^2 v - v^2)$ について，$(0, 0)$ の近くで，$x_1 = u'^3 + u'v', x_2 = v'$ にする過程の，$(u, v) \rightarrow (u', v')$ $u' = -u, v' = u^2 - 2v$ という変換が immersion であることをチェックする必要はないのですか？

答． 必要あります．講義では説明を省略しましたが，ヤコビ行列式 (Jacobian) $\dfrac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)}(0, 0) = 2 \neq 0$ なので，逆写像定理 (inverse mapping theorem) から，$(0, 0)$ の近傍で，逆写像も可微分になります．つまり，局所微分同相写像 (local diffeomorphism) です．

問． 平面 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v} = c$ とは？

答． $\mathbf{R}^3$ 内の平面の方程式は，$\xi x + \eta y + \zeta z = c$ ただし，$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ で表されます．(ξ, η, ζ) は単位法線ベクトルです．$\boldsymbol{v} = (\xi, \eta, \zeta), \boldsymbol{x} = (x, y, z)$ とおくと，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v} = c$ という形で表されます．ただし，１つの平面について，(ξ, η, ζ) が単位法線ベクトルのとき，$-(\xi, \eta, \zeta)$ も単位法線ベクトルになります．つまり，$-\xi x - \eta y - \zeta z = -c$ も同じ平面を表します．

問．「$\mathbf{R} \times S^2$ を $\mathbf{R}^2$ 上の向きのついた平面全体の空間とみなす」とありますが，ここで，向きを考えたのは，$\mathbf{R} \times S^2$ の $(c, \boldsymbol{v}) \leftrightarrow$ 平面 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} = c$ を $\mathbf{R}^3$ 内の平面，とすると，$(c, \boldsymbol{v}), (-c, -\boldsymbol{v})$ に対応する $\mathbf{R}^3$ 内の平面が同じものになるため，ですか？どのように平面の向きを決めるのか，聞きそびれてしまったので，出来れば詳しく教えてください．

答． そうです．出来ます．そのために，平面の向きとは何か，ということを説明しましょう．(このことがわかれば，多様体の向きについては容易に理解できます．そして，それがわかれば，多様体論の理解が飛躍的に向上します)．一般に，実ベクトル空間 V の基底たちに同値関係を導入します．V の基底 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ と，V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が同値であるとは，行列式が正であるようなある n 次実正則行列 A によって，$(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)A$ と結びついていることを言います．この同値関係に関する，V の基底の同値類のことを，V の**向き**と言います．同値類は丁度２つあります．(３次元だと，いわゆる右手系と左手系ですが，これらを数学的に特定することはできません)．そのうちの１つの同値類を指定することを，V に向きを与える，と言います．V に向きが与えられた場合，指定された方の同値類に属する基底を**正の基底**，指定されていない方の同値類に属する基底を**負の基底**と呼びます．さて，$V = \mathbf{R}^3$ の向きとしては，標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を含む同値類をとるのが標準的です．(この場合，負の向きの方は，たとえば，$\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3$ が定めます)．いま，$\mathbf{R}^3$ の平面を考えます．平面に向きを決めるという意味は，それを平行移動して $\mathbf{R}^3$ の２次元部分空間としての向きを決めることです．(あるいは，接空間の向きを決めること)．さて，平面に法線ベクトル $\boldsymbol{v}$ を指定すると，その平面の向きが，「$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ が平面の正の向き $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ が $\mathbf{R}^3$ の正の向き」により定まります．もし，$\boldsymbol{v}$ の代わりに，$-\boldsymbol{v}$ を指定すると，平面には逆の向きが入ります．したがって，「向きのついた平面」とは，法線ベクトルが指定された平面」ということです．

問． $\boldsymbol{p}_u = (1, 0, 2uv), \boldsymbol{p}_v = (0, 1, u^2 - 2v)$ から $\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v = (-2uv, -u^2 + 2v, 1)$ は，どのように計算するのですか？

答． 外積の計算です．$\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v = \left(\begin{vmatrix} 0 & 2uv \\ 1 & u^2 - 2v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2uv & 1 \\ u^2 - 2v & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right)$ と計算します．

問． Menn's surface の Menn という人は，どのような人ですか？

答． 知りません．なんとなく男性のような気がします．失礼しました．

問． 多様体という概念がよくわかりません．とにかく，多様体とは，おおざっぱに言ってどんなものを指す

のか教えてください．

答． まず，空間内の曲線や曲面を想像すると良いと思います．一般的に，多様体は局所座標近傍を張り合わせたものです．この講義に登場している，円周 S^1 や２次元球面 S^2 や $\mathbf{R}^3$ や $\mathbf{R}^3 \times S^2$ や $\mathbf{R} \times S^2$ や T^*S^2 や (まだ登場していませんが) $S^1 \times S^1$ や２次元射影空間 $\mathbf{R}P^2$ などはみな多様体です．このような具体的なイメージから多様体を知ると良いと思います．

問． 講議内で「ホイットニー (Whitney) が多様体の定義をした」とありましたが，Whitney 以前は，$\mathbf{R}^3$ 内の曲線，曲面，方程式解集合のように，ある空間に入っている滑らかなものと考えられていたのでしょうか？また，Whitney の定義が，世界中の数学者に受け入れられた理由は何だと先生はお考えですか？

答． そう考えられていたと思います．現代でも，ほとんどの人が (数学者でさえ) 抽象的な多様体については正しく理解していないと想像します．複素数の概念が，人々に受け入れられるのに何百年もかかった現象と少し似ているなと思います．それはともかく,「多様体は局所座標近傍を張り合わせたもの」という定義は，解析学 (微積分学) と非常に相性のよい，きわめて自然な定義です．Whitney が多様体の定義を与えたころには，こころある数学者は同様の概念をつかまえていたようです．たとえば，ワイル (Weyl) の「リーマン面」(田村訳，岩波書店) では，(複素) １次元多様体の定義が明確に定義されています．また，抽象的な多様体の概念は，一般相対論との関係でも普及したと考えられます．空間が曲がっている，曲がった宇宙の形はどういうものか，と考えるときに，その宇宙が何か別の空間に入っている，というわけにはいかないので，抽象的な空間概念はどうしても必要になってくるわけですね．

問． 幾何学 (多様体論) の意義はどのあたりにありますか？知り合いと飲んで話していた時に，彼が幾何の意義がわからない，と言ったので，物事を考える枠組みや土俵を与える，というふうなことを言ったところ，でも実際にやる作業は微積分で微分方程式をどうこうしたり，とかいうのが多いのだから，詰まるところ解析に帰着されるのでは？と言われたので (彼は解析専攻)，あまり多くが見えていない自分は窮してしまいました．論破しようというわけでもないのですが，どういう見方をするのがよいのでしょうか？

答．「日常」と「非日常」という切り口から説明してみましょう．たしかに，自分のことを顧みても，私 (石川) は一応幾何学者の端くれですが，数学の研究で普段やっていることといえば，微分したり，積分したり，足したり引いたり，組み合わせの数を数えたり，ホモロジー群を計算したり，などということで，解析の計算や代数の計算をしていますね．その点で，質問に出てくる知り合いの人は正しいことを突いています．詰まるところ解析 (あるいは代数) に帰着される．でも，その解析をなぜやるか，というと，理由があってやるわけです．何か研究の指針，目的，動機付けがあって，だから計算しているわけです．では，その指針は，どういうことから得るか，どうやって，得られたデータを解釈して，次の計算を進めていくか，どうやって問題提起するか，どのように研究の方向付けをするか，それをするためには，扱う問題の幾何的な意味付けが不可欠です．**幾何には物事の見通しをつける力があります．物事をつなげる力があります．** 良く考えてみると，微分は接線の傾きを求めることであり，積分は面積や体積を求めることであり，微分方程式を解くことは，解曲面を求めることです．幾何的な意味を持たないものはありません．図を書かずに，ベクトル解析のグリーンの定理，ガウスの定理を説明できるはずもなく，幾何を使わずに複素関数論のコーシーの定理を説明できるはずもないですね．さて，そうして研究が一段落して，では，次に何をどう研究していこうか，というときに，いままで調べて来た結果を総合して，データを幾何的に意味付けして整理していくことが必要になります．実はそのときが，研究の価値を決める大事な瞬間です．幾何はいざというときに力を発揮します．幾何の役割は，車の運転にたとえとナビゲーターであり，山登りにたとえると，集団の "しんがり" にいる人で，分岐点にぶつかって先頭が判断に困っているとき，適切に進むべき道を指示する人のようなものです．**幾何は非日常の数学である**と言えます．(もちろん，そのような幾何的な意味付けに，解析や代数の裏打ちがなければならないのは言うまでもありません．堅実な日常がなくて非日常ばかりだと，ただのお祭り好きということになります)．ちなみに，最近出版された本 (アクゼル著，林訳「相対論がもたらした時空の奇妙な幾何学」早川書房) の帯に "**驚くべき予見力の源は「幾何学」にあり**" という文章が出ています．ところで，幾何学の研究に限らず，解析や代数の専門家であっても，一流の良い仕事をしている人には，幾何の得意な人，幾何的なセンスにあふれている人が多いようです．(例外は，カントール (Cantor) ぐらい？) たとえば，歴代の Fields 賞受賞者を見ると，解析学者で受賞しているヘルマンダーでもシュワルツでもリオンスでも，やっている仕事には，幾何的なアイディアがいっぱい詰まっています．また，現在活発に研究されている分野としては，たとえ代数の分野であっても，たとえば，代数幾何や数論幾何やリー群 (群多様体) の表現論であり，たとえ解析の分野であっても，たとえば，幾何解析 (偏微分方程式の幾何学的理論) や大域解析 (多様体上の解析学) や代数解析 (シンプレクティック幾何やホモロジー代数の応用等) や数理物理 (ミラー対称性，複素幾何とシンプレクティック幾何の応用等) であったりするわけです．どの分野に進むにしても (つまらない研究で満足したくなければ) 幾何なくしては数学の研究は不可能だとさえ言えます．行き詰まった分野に新しい息吹を吹き込むのも幾何です．新しい息吹を吹き込まれた分野が現在発展しています．(もちろん，逆に言えば，古い幾何学を再生させるのは，新しい解析学であり，新しい代数構造の研究です)．そもそも，解析とか代数とか幾何などと分けるのはあくまで便宜的，暫定的なものです．もし分けるとしたら,「良い数学とその他」とか,「おもしろい数学とその他」とか,「縄文数学と弥生数学」とか「楕円数学，双曲数学，放物数学」という分類の方が良いかもしれませんね．後の方の分類はやや冗談ですが，結局「数学は一つの有機体である」(V.I. Arnold) ということです．ではまた．