

# ガウス写像の数学 (幾何学特論 4・幾何学講義 8) 質問の回答

No. 3 (2002年10月18日) の分 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ 剛郎)

問.  $\omega$  が非退化の定義がよくわかりません. // “非退化” がよくわかりません. ある条件をみたす行列のことでか? //  $\omega$  の行列表示とは何ですか? // 交代双一次形式を説明してください. // 非退化の定義や, 非退化な時の表現行列の rank が  $2n$  になるなどはわかったのですが, いまひとつピンときません. 非退化である時の像はどんな感じの状況になるのでしょうか? 非退化の概念は, どのような所で役に立つのでしょうか?

答. こんにちは. この講義の今後の予定が, 数学科談話室前の掲示板に貼ってあるので参考にしてください. さて回答ですが, まず,  $\omega$  は多様体  $M$  の上の 2 次の微分形式 (differential two-form) であるということを押さえておきましょう. つまり, 多様体  $M$  の各点  $x$  に対して, 交代双一次形式  $\omega_x: T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  を定めています. それに関する非退化条件です. では,  $\omega_x$  が非退化ということは, どのようなことでしょうか? それに答えるために, 一般に, ベクトル空間上の交代双線形形式 (交代双一次形式, 歪対称双線形写像, ... alternative bilinear form, skew-symmetric bilinear form)  $B: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  が非退化であるという意味を説明します. 双線形 (双一次) というのは,  $B(u, v)$  が,  $u$  についても線形,  $v$  についても線形ということです. ちなみに, 「双」という字は「2つ」という意味ですね. それはともかく, それから, 交代というは, 変数 (変ベクトル) を入れ替えたらマイナスが付く, つまり,  $B(u, v) = -B(v, u)$  が成り立つことです. その他に, 対称というものがあり, その場合は,  $B(u, v) = B(v, u)$  が成り立ちます. さて, 本題の「非退化」ですが, 非退化とは, もちろん, 退化していない, というような意味ですが, 交代双線形形式  $B$  が非退化とは「 $B(u, v) = 0$  がすべての  $v \in V$  について成り立つのは  $u = 0$  の場合しかない」ということです. ちなみに, このような非退化性の定義は, 対称な場合や交代は場合にも意味を持ちます. (一般の双線形写像の場合は, どちらの変数に関して非退化かを意識しなくてはならない). それはともかく, 非退化性の意味をわかりやすく説明するために, 双線形形式  $B: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  を行列で表します. 行列で表すために,  $V$  の基底を 1 つ選びます.  $u_1, u_2, \dots, u_n$  を  $V$  の基底とします.  $B$  は双線形なので,  $B$  は, 基底でのデータ  $B(u_i, u_j) \in \mathbb{R}$  だけで決定されます.  $n \times n$  型行列  $(B(u_i, u_j))_{1 \leq i, j \leq n}$  のことを双一次形式  $B$  の表現行列と呼びます. 表現行列  $A = (B(u_i, u_j))_{1 \leq i, j \leq n}$  から, もとの  $B$  は,  $B(u, v) = (u_1, \dots, u_n) A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

で決まります. ここで,  $u = \sum_{i=1}^n u_i u_i, v = \sum_{i=1}^n v_i u_i$  です. 双線形形式  $B$  が対称というのは, その表現行列  $A$  が対称行列であることです. 双線形形式  $B$  が交代というのは, その表現行列  $A$  が交代行列であることです. 双線形形式  $B$  が非退化というのは, その表現行列  $A$  が非退化行列であることです. 非退化行列というのは, 正則行列のことです. もう少し詳しく説明しましょう. 双線形形式で, 皆さんに一番なじみがあるのは内積だと思います. 簡単のために,  $\mathbb{R}^n$  の場合に説明すると,  $B(u, v) := u \cdot v$  を考えるわけです. これは非退化です. なぜなら,  $u \cdot v = 0$  が, すべての

$v$  について成り立つのは,  $u = 0$  のときだけです. では,  $B(u, v) = (u_1, \dots, u_n) A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$  が非退化なのは, どう

いう場合でしょうか? すべての  $v$  について,  $B(u, v) = 0$  ということは,  $(u_1, \dots, u_n) A = 0$  のときだけです. この条件から,  $u = 0$  が導かれるということは, そう,  $A$  が正則行列である, ということですね. さて, 非退化ということが, どのように役に立つか, ですが, シンプレクティック幾何で本質的です. 各点  $x \in M$  に対して  $\omega_x: T_x M \rightarrow T_x M$  ( $\dim_{\mathbb{R}} T_x M = 2n$ ) が非退化なので,  $\omega_x$  が誘導する線形写像  $\varphi: T_x M \rightarrow (T_x M)^* = T_x^* M$  が単射 (injective) であり, したがって全単射 (bijective) になります. ですから, シンプレクティック多様体の上では, 接ベクトルと余接ベクトルが 1 対 1 対応します. シンプレクティック多様体の上の関数  $H$  の外微分  $dH$  は, 余接ベクトル場ですが, それに対応して, ベクトル場が定まります. そのベクトル場をハミルトンベクトル場 (Hamiltonian vector field) と呼びます. これが, いわゆるハミルトン微分方程式を定めます. こうして, シンプレクティック幾何が作られます. (同様に, 計量 (内積) の非退化性は, リーマン幾何で本質的です. リーマン多様体の上では,  $dH$  に対応するベクトル場を  $\text{grad}H$  と書き, 勾配ベクトル場 (gradient vector field) とよびます).

問. 代数学の講義で, 反対称な非退化な双線形写像  $B$  のある空間  $W$  をシンプレクティック空間と呼んで, そこでの基底で,  $\{p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n\}$  ( $B(p_i, q_j) = \delta_{ij}, B(p_i, p_j) = 0, B(q_i, q_j) = 0$ ) というのがとれる, という話があったのですが, 今回の講義の冒頭での座標系は, これになっているのでしょうか? また, シンプレクティック多様体というのは, 多様体構造を入れたシンプレクティック空間で, 特に, その  $B$  が  $\omega$  であるものという理解でよいのでしょうか?

答. 筋は悪くないです. でも, もう少し厳密に説明しておきます. 代数でいうシンプレクティック空間は, シンプレクティックベクトル空間のことです. シンプレクティック多様体のことではありません. シンプレクティック多様体  $M$  の各点  $x \in M$  における接ベクトル空間  $W = T_x M$  がシンプレクティックベクトル空間です.  $B = \omega_x$  です.  $W$  や  $B$  が点ごとに変化します. (さらに, シンプレクティック多様体の場合は, それらを結び付ける条件  $d\omega = 0$  も課しています). とはいえ, 多様体が  $\mathbb{R}^{2n}$  の場合は, それが接ベクトル空間と同一視できるのは本当です. ただし, 座標系  $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$  の  $p_i$  とか  $q_j$  は, あくまで関数 (座標関数) であって, ベクトルではないので紛らわしいです.  $B(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial p_i})$  などと書いた方が断固正確です. ところで, 関係ないですが, 皆さんは, 「座標」とは何かということをご存知ですか?  $\mathbb{R}^2$  の点  $P$  の座標が  $(x, y)$  という場合の,  $x$ -座標,  $y$ -座標というのはいったい何ものでしょうか? よく考えてみると, たとえば,  $x$ -座標は,  $\mathbb{R}^2$  の各点  $P$  に対しある数値を定めるわけだから, 関数  $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  であるわけです. つまり, 座標というのは関数です. 座標関数と呼びます. 関数だからこそ, その外微分  $dx$  や  $dy$  が定義されるわけですね.

問. 「部分多様体  $L \subset M$  がラグランジュ部分多様体 (Lagrangian submanifold, Lagrange submanifold)  $\Leftrightarrow \dim L = \frac{1}{2} \dim M, \omega|_M = 0$ 」, 「写像  $f: L^n \rightarrow M^{2n}$  がラグランジュはめ込み (Lagrangian immersion, Lagrange immersion)  $\Leftrightarrow \dim L = \frac{1}{2} \dim M, f^* \omega = 0, f: \text{immersion}$ 」と板書していたときの説明を聞きのがしました.

答．たぶん，つまらないことを話しました．記憶によると， $L^n$  とか， $M^{2n}$  というふうに次元を明示しているのに，さらに  $\dim L = \frac{1}{2} \dim M$  と書くのは，重複しているね，というようなことだったと思います．「馬から落馬する」と言うのと同じです．でも，重要な点なので，繰り返して説明しても良いですね... などと言ったかな．ともかく失礼しました．

問．ラグランジュ部分多様体 (or はめ込み) の定義における「 $\dim L = \frac{1}{2} \dim M$ 」とはどんな利点があるのですか？// ラグランジュ部分多様体には，この構造が入っていない多様体と比べて，どのような特徴，利点があるのですか？// 「ラグランジュ部分多様体というのは，( $f^*\omega = 0$  となることから考えて)，各接空間が元の多様体の接空間の中でラグランジュ部分空間となっていて，それゆえ，ある意味での極大条件を満たしている特徴ある部分多様体である」という見方でよいでしょうか？

答．そうです． $f^*\omega = 0$  となるもののうちで次元が最大であるという特徴です．

問．シンプレクティック形式の引き戻しが消えることの利点・意味等をもう少し (具体的な例を用いて) 説明してほしいと思います．

答．具体的な例として， $\mathbb{C}^n$  上のエルミート計量 (Hermitian metric)  $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i$  を考えましょう． $(u, v) := \operatorname{Re}\langle u, v \rangle$  (実数部) は， $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$  のリーマン計量 (正値対称形式) で， $[u, v] := \operatorname{Im}\langle u, v \rangle$  (虚数部) は， $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$  のシンプレクティック形式 (非退化交代形式) です．そして， $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$  上でシンプレクティック形式が消えます．一般に，シンプレクティック形式が消えるような，( $\mathbb{C}^n$  内の) 実  $n$  次元部分空間は， $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$  をユニタリ変換したものに限られます．これはラグランジュ部分空間の意味付けの1つです．また，別の意味 (意義) もあります．具体的でないかも知れませんが，すべてのラグランジュ部分多様体は，局所的には，ある関数  $h = h(q)$  に関して，講義中に例示した  $\{(\frac{\partial h}{\partial q}(q), q)\}$  の形の部分多様体に，シンプレクティック微分同相写像 (シンプレクティック形式を保つ微分同相写像, symplectomorphism) で写ることが知られています．したがって，シンプレクティック形式の引き戻しが消えるような最大次元の部分多様体は，“関数の外微分のグラフ”をあるシンプレクティック微分同相写像で動かしたようなものである，少なくとも，局所的にはそのようなものである，という考え方で良いと思います．たとえば，微分方程式の解を求めようとする時に，関数という狭い範囲で見つけるのが困難な場合でも，より広くラグランジュ部分多様体の範囲で見つけておいて，それが，どの程度，古典的な関数で表されるかを調べる，という方法があります．

問．引き戻しについて，何がしくて引き戻すのでしょうか？ どういう使い方をすることが多いのでしょうか？

答．引き戻しの概念の特別な場合である「制限」(restriction) について説明してみます．多様体上の微分形式は，その多様体の各点で，接ベクトル (の組) に対し，数値を出力するわけですが，その多様体の部分多様体について，その部分多様体に限って考えたい場合，部分多様体の各点で，その部分多様体の接ベクトル (の組) に対する数値だけに注目すればよいので，そうする，というのが，“微分形式の制限”の意味合いです．

問．「ラグランジュ部分多様体はある意味で一般化された関数とみなすことができる」とはどういうことですか？例で， $\pi: T^*N \rightarrow N$  について，任意の  $q$  に対し， $\pi^{-1}(q) \subset T^*N$  はラグランジュ部分多様体，とありましたが， $\pi^{-1}(q)$  が一般化された関数ということでしょうか？

答．なるほど．鋭い指摘ですね． $\pi^{-1}(q)$  はラグランジュ部分多様体なので，これもある種の関数と考えられるはずですね．変数  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  の関数を，“ポテンシャル”であるとみなしましょう．数学的には厳密ではありませんが， $\pi^{-1}(q)$  は1点  $q$  だけに台をもつポテンシャルであるとみなすことができます．

問． $\pi^{-1}(q)$  上で  $q$  が一定になるのはどうしてでしょう？  $q$  を固定しているからですか？

答．そうです． $q$  を固定しているからです．

問．関数に対してラグランジュ部分多様体がきまるとありますが，関数をラグランジュ部分多様体にする事で得る利点はなんですか？一般化されることで見通しがよくなるということですか？

答．その通りです．たとえば，ヘルマンダー (Hörmander) の仕事を勉強すると実感できると思います．

問．ジェネライズドファンクションの重要さを教えてください．

答．難しい質問ですね．関数概念を拡張する話で有名なのは，デルタ関数 (delta function) ですね．デルタ関数はもともと，ディラック (Dirac) が数学的には明確ではない形で導入したのですが，その後，シュワルツ (Schwarz) により，超関数 (distribution) として明確に定義されました．さらに，佐藤幹夫氏により，ハイパーファンクション (hyper function) として定義され，いろいろな分野で役に立っています．ただし，ラグランジュ部分多様体と，今まで知られている generalized function の関係をコンパクトに論じることは難しいので御容赦ください．

問．シンプレクティック多様体は何とみなせますか？

答．わかりません．あくまで， $T^*N$  という1つのシンプレクティック多様体の中にたくさんあるラグランジュ部分多様体というものの解釈です．

問．ファイバー方向という意味がよくわかりません．

答．簡単なファイブレーション (fibration)  $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   $\pi(x, y) = x$  で説明します．横軸が  $x$  軸で，縦軸が  $y$  軸です． $\pi$  のファイバーは， $y$  軸と平行な直線たちです．この場合，ファイバー方向とは， $y$  方向のことです．

問．ラグランジュ特異点と普通の特異点との違いは，単なる底空間の間の写像としての特異点ではなく，上部構造を介した上方の特異点である，だから，色々面白いことも起こりそうだと考えてもよいのでしょうか？

答．まったくその通りです．

問．immersion でなく embedding で考えることは，なぜしないのですか？

答．します．必要があれば何でもします．embedding かどうかということが重要でなく，単に immersion であることがわかればよい状況では，immersion であることをチェックしているということです．

問． $T^*N$  の局所座標系について僕の板書は正しいのでしょうか？ $p_i(\xi) = \xi(\frac{\partial}{\partial q_i})$  とは，“ $\frac{\partial}{\partial q_i}$  を  $\xi$  の余ベクトルで測った値”を  $p_i(\xi)$  とするということなののでしょうか？

答．その通りです．正しく理解していると思います．

問．今回は， $\theta: T^*S^2$  上の微分 1-形式， $\omega = d\theta$  が  $T^*S^2$  上シンプレクティック形式  $\Leftrightarrow$  (1)  $\dim C(F) = \frac{1}{2} \dim T^*S^2$  (2)  $L(F)^*\omega = 0$  (3)  $L(F)$  ははめ込み，だったのですが...

答．私(石川)の板書の仕方が悪くて，誤解されていると困るので明確にしておきたいのですが， $\theta: T^*S^2$  上の微分 1-形式， $\omega = d\theta$  は  $T^*S^2$  上シンプレクティック形式と呼ばれる．この定義のもとで，(1)(2)(3)( $\Leftrightarrow L(F)$  が Lagrange immersion) を確かめよう」という講義の流れでした．

問．この講義では，すべて  $C^\infty$  ですか？最初に断りましたか？

答．そうです．多様体や写像は，すべて  $C^\infty$  級であることを仮定しています．でも，最初に断りませんでした．なぜ断らなかったかということ，おらかな気持ちで数学をしよう，ということです．というのは言い訳で，単に言い忘れていただけです．それはともかく，皆さんが主体的に正しく意識してくれば最高です．(もちろん， $C^\infty$  級か解析的かなどが重要な場合は，明示するのでまったく心配は要りません)．

問．“平均曲率”に興味を持っています．そこで，“ガウス曲率”と“平均曲率”の相違点等を教えて下さい．小林昭七先生の「曲線と曲面の微分幾何」を勉強したときに，Gauss 曲率と平均曲率が第 1，2 基本量で書かれていたのですが，似ている部分や異なっている部分はたくさんあるのですか？少し聞いてみたいです．

答．平均曲率も重要で，おもしろい対象です．講義でも説明するかも知れないですが，ガウス曲率と平均曲率の関係を「曲線と曲面の微分幾何」とちょっとだけ異なる視点で説明してみましょう．曲面  $M \subset \mathbb{R}^3$  について，単位法線ベクトル場を  $e$  と書いたわけですが，各接ベクトル  $w \in T_P M$  について， $e$  の  $w$ -微分  $D_w e$  も  $T_P M$  に属することがわかるので，線形写像  $A = A_P: T_P M \rightarrow T_P M$  を， $A(w) := -D_w e$  によって定義することができます．これを，形作用素(shape operator)，あるいは，ワインガルテン写像(Weingarten map)と呼びます．曲面  $M$  の“形”を表現している作用素だからそう呼びます．このとき，ガウス曲率  $K(P) = \det A_P$  であり，平均曲率  $H(P) = \frac{1}{2} \text{trace} A_P$  です．すなわち，ガウス曲率は， $A_P$  の固有値の積で，平均曲率は， $A_P$  の固有値の平均です．ちなみに  $A_P$  の固有値(2つあります)を，主曲率(principal curvature)と呼びます．この講義では，主にガウス曲率を扱い，たとえば，ガウス曲率が零である曲面の研究を紹介します．しかし，平均曲率に関してもいろいろの研究があります．ちなみに，平均曲率が零である曲面を極小曲面と呼びます．

問． $\theta$  の外微分を  $\int_{\partial D} \theta = \int_D d\theta$  で定義(?)していましたが，これは正しいのでしょうか？局所座標系やベクトル場を放り込んだ代数的定義と同じですか？この定義を定式化すると，「 $M$  上の  $p$  form  $\theta$  の  $d\theta$  とは，任意の境界付き，向き付き compact 部分多様体  $D \subset M$  に対し， $\int_{\partial D} \theta = \int_D d\theta$  が成り立つような  $p+1$  form である」でしょうか？もしこれが正しいとすると， $d^2 = 0$  は， $\int_D d^2 \theta = \int_{\partial D} d\theta = \int_{\partial(\partial D)} \theta = 0$  ( $\partial(\partial D)$  は  $\emptyset$ ) が出てきます．

答．この定式化で良いと思います．正しいです．定義として意味をもつためには， $\int_{\partial D} \theta = \int_D d\theta$  となるような  $p+1$  form  $d\theta$  がただ 1 つ存在するのを確かめなければいけません，一意性は，すべての  $D$  について成立する，という条件から，比較的容易に示されます．存在については，従来の外微分の定義に基づいた理論のもとでのストークスの定理により正しいことがわかっています．ただし，定義が正しいかどうかということと，そのやり方で理論が単純に整備されるかどうかは別問題です．確かに， $d^2 = 0$  は，この定義から直ちに導かれますが，その前に， $d\theta$  の存在を示す(“ストークスの定理”の証明の)ところで， $d^2 = 0$  に該当する事実を使うので，その前に証明しておかなければならないわけですね．結局，外微分の定義というよりも，ストークスの定理が，境界をとることの双対であるという「外微分の本質」を表す，言っておくのが適当かと思います．

問． $T^*N$  に何らかの別の構造を入れて，それと Lagrangian immersion との関連を考えるというような話はありますか？

答．あります．一例を挙げると， $N = \mathbb{R}^n$  の場合， $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$  には，シンプレクティック構造の他に「複素構造」が与えられます．つまり， $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$  ということです．Lagrangian immersion と複素部分多様体の共通部分を考えることは良くあることです．

問．symplectic 構造や，contact 構造は，いつ頃誰が初めに定義したのですか？こういう構造は自然に数学の中に入ってきたのですか？“世界が広がる”と言われても，いまひとつ実感がわきません．

答．難しい質問ですね．いつからか誰ともなく徐々に考えられるようになったということだと思います．解析力学(Euler, Lagrange, Legendre, Hamilton, ...) や，微分方程式の幾何学的理論(Monge, Lie, ...)などに，見る人が見ればその兆しを感じるとは思いますが，明確に意識されたのは，ようやく 20 世紀になってからだと思います．ユークリッド構造や，微分構造(多様体の構造という意味ではなく微分学というもっと素朴なもの)のように直接現れるものではないから，実感がわかないのは当然であり，歴史的にも認識されるのに時間がかかったわけです．つまり，ようやく，symplectic 構造や，contact 構造を意識できるくらいまでに，人類が知的に成熟してきた，と言えるかもしれません．ところで，まったく関係ないですが，この前，田舎の家に帰ったとき，昔読んだ本(矢野健太郎著「ゆかいな数学者たち」新潮文庫)が物置きから出てきました．昭和 56 年とあるので，僕(石川)が修士 1 年生の頃買った本を昔帰省したついでに置いておいたものようです．当時は良くわからなかったけれど，今もう一度読み返してみると，いろいろ面白いことが書いてありますね．その中に「接触変換」という用語がちょっとだけ出てきます．ということで，ではまた．