ガウス写像の数学 (幾何学特論４・幾何学講義８) 質問の回答

No. 2 (２００２年１０月１１日) の分　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

問．“はめ込み” や “埋め込み” とは何ですか？

答．こんにちは．さて回答ですが，わかりやすく説明するために，円周 S^1 (◯) を考えます．その円周から平面 $\boldsymbol{R}^2$ への写像で，８の字に写すのがはめ込みで，０の字に写すのが埋め込みです．♡ に写すのは，はめ込みではありません (したがって，埋め込みでもありません)．はめ込みには，瞬間速度が零になる場所がありません．多様体論の言葉で言うと，**はめ込み**の条件は，各点の微分写像が単射であることです．**埋め込み**とは，はめ込みであり，１対１であり，しかも，その像との同相写像になるもののことです．

問．前回 $L(F)$ はラグランジュはめ込みである (補題)，とあり，今回 $L(F)$ は immersion である，とありますが，はめ込みであることは，ラグランジュはめ込みから出てくるのでは？条件 (1) 〜 (3) がラグランジュはめ込みの定義ですか？// ラグランジュはめ込みと，はめ込みは違うのですか？

答．そうです．条件 (1) 〜 (3) がラグランジュはめ込みの定義です．ラグランジュはめ込みと，はめ込みは違います．付加条件 (1) (2) をみたすようなはめ込みのことを，**ラグランジュはめ込み**とよびます．前回紹介して補題を，今回証明したということでした．

問．T^*S^2 がよくわかりません．

答．T^*S^2 は S^2 上の余接ベクトルの全体の集合です．球面 S^2 の各点 $\boldsymbol{v}$ における余接空間 $T^*_{\boldsymbol{v}}S^2$ を集めたものです．つまり，$T^*S^2 = \cup_{\boldsymbol{v}\in S^2} T^*_{\boldsymbol{v}}S^2$ (disjoint union) です.「$\xi \in T^*S^2 \Leftrightarrow (\exists \boldsymbol{v} \in S^2, \xi \in T^*_{\boldsymbol{v}}S^2)$」 ということです．

問．T^*S^2 は S^2 上のベクトル束とは違うのですか？

答．S^2 上のベクトル束です．ちなみに，余接ベクトル束とも呼ばれます．接束 (接ベクトル束) TS^2 も S^2 上のベクトル束です．ベクトル束はいろいろな場面で登場しますね．

問．$\pi : T^*S^2 \to S^2$, $\pi(\xi) = \boldsymbol{v}$ が自然な射影とあるのですが,「自然な射影」の定義がわかりません．

答．$\xi \in T^*_{\boldsymbol{v}}S^2$ のときに，$\pi(\xi) = \boldsymbol{v}$ とおく，というのが定義です．この場合の「自然な」という言葉の数学的な定義はありません．ただ，T^*S^2 の定義から，当然のように付随してくる写像である，というぐらいの意味で用いました．

問．記号 $T^*_{\boldsymbol{v}}S^2$ で，$\boldsymbol{v}$ を下に書く意味は何ですか？

答．どの場所での余接ベクトル空間を考えているかを明示するためです．

問．リウビル形式の定め方のところで，$\xi \in T^*S^2, w \in T\pi(\xi)S^2$ に対して，$\theta_\xi(w) = \xi(\pi_* w)$ とありますが，ていねいに略さずに書くと,「各 $\xi \in T^*S^2$ をとると，$\forall w \in T_\xi(T^*S^2)$ に対して，$(\pi_*)_\xi : T_\xi(T^*S^2) \to T_{\pi(\xi)}S^2$ であるから，$(\pi_*)_\xi w \in T_{\pi(\xi)}S^2$ で，$\theta_\xi(w) = \xi(\pi_* w)$ と定める．これにより，$\theta_\xi \in T_\xi(T^*S^2)$ であるから，θ は T^*S^2 上の１次微分形式」でよいと思うのですが．// リュウビル形式の定義がよくわからなかったです．$w \in T_{\pi(\xi)}S^2$ は $w \in T_\xi(T^*S^2)$ の間違いではないですか？

答．こういう質問書をもらうとうれしいですね．その通りです．$w \in T_{\pi(\xi)}S^2$ は $w \in T_\xi(T^*S^2)$ の間違いでした．**訂正します**！講義や本の間違いが指摘できるということは，その内容がある程度身に付いている証拠ですね．

問．T^*S^2 上のリウビル形式 (Liouville form) θ を考える際に,「下で ξ で測る」というように書かれていましたが，どういう意味でしょうか？「トートロジカル (tautological)」というような事も言っておられたと思うのですが．

答．講義で図に描いたように，S^2 の上の方に T^*S^2 を描きます．ξ は T^*S^2 の点なので，上にあるわけです．でも，定義から，ξ は，ある $\boldsymbol{v} \in S^2$ に関して $\xi \in T^*_{\boldsymbol{v}}S^2$ なので，下の S^2 の $\boldsymbol{v}$ における余接ベクトルです．その下の空間の余接ベクトル ξ を使って，上の空間の接ベクトルを下に落として測るという意味です.「トートロジカル」というのは，余接束であるという情報を “そのまま”使って定まる，という程の意味です．なお，次の質問の回答も参照してください．

問．T^*S^2 上のリウビル形式の定義や例について説明をお願いします．

答．定義については上に書いてあるので，わかりやすい例を説明します．$\boldsymbol{R}^2$ の余接束 $T^*\boldsymbol{R}^2$ の場合に (同じ様に定義したリウビル形式について) 説明してみます．$\boldsymbol{R}^2$ の座標を x_1, x_2 とするとき，$T^*\boldsymbol{R}^2$ の点 ξ は，$\boldsymbol{R}^2$ のある点での余接ベクトルなので，$\xi = p_1 dx_1 + p_2 dx_2$ $(p_1, p_2 \in \boldsymbol{R})$ と表されます．ξ は，$\boldsymbol{R}^2$ のどの点の余接ベクトルか，ということと，係数 p_1, p_2 だけで決められるので，$T^*\boldsymbol{R}^2 \cong \boldsymbol{R}^4$ です．x_1, x_2, p_1, p_2 が $T^*\boldsymbol{R}^2$ の座標系になります．このとき，リウビル形式 θ がどう表されるかというと，$\theta_\xi(\dfrac{\partial}{\partial p_1}) = \theta_\xi(\dfrac{\partial}{\partial p_2}) = 0$ であり，$\theta_\xi(\dfrac{\partial}{\partial x_1}) = p_1, \theta_\xi(\dfrac{\partial}{\partial x_2}) = p_2$ なので，$\theta = p_1 dx_1 + p_1 dx_2$ とあらわされます．余接ベクトルの一般的な表示とまったく同じ形で表される (余接束の上の) 微分１形式が**リウビル形式**です．余接束の上のもっとも大切な微分形式です．

問．微分 1-形式と微分 2-形式ではどんな違いがあるのですか？

答．一言で言うと，微分 1-形式 (differential one-form) は，接ベクトルや曲線の “長さ”を測るものです．(ここで，“長さ”というのは，だいたいの雰囲気を理解してもらうための “たとえ”で，たとえば，負の数にもなるものです)．それに比べて，微分 2-形式 (differential two-form) は，接ベクトル２本の組や曲面の “面積”を測るものです．関連する用語としては，線積分や面積分があります．

問．外微分というのは，普通の微分とは違うのですか？// 外微分の定義がよくわかりません．

答．普通の微分とは違います．もちろん密接に関連しますが，違うものと考えてください．たとえば，関数 $f(x_1, x_2)$ の外微分は，いわゆる全微分 $df = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2} dx_2$ のことです．偏微分が，座標系に依存した概念なのに比べて，外微分は，座標系の取り方に依存しない，より根源的な対象です．**行列が線形写像の仮の姿であるように，偏微分たちは外微分 (全微分) の仮の姿です**．それはともかく，外微分は，関数だけでなく，微分形式一般に対し定義されます．たと

えば，$\theta = p_1 dx_1 + p_2 dx_2$ の外微分は，$d\theta = dp_1 \wedge dx_1 + dp_2 \wedge dx_2$ と定義されます．外微分 $d\theta$ の本質的な意味あいは，領域 D の境界 ∂D 上の線積分 $\int_{\partial D} \theta$ が D 上の面積分に等しくなるような微分 2-形式である，ということです．つまり，$\int_{\partial D} \theta = \int_D d\theta$ となるという条件で 2-form "$d\theta$" を探していって，上のような定義に落ち着いた，と考えてよいと思います．(定義の導入の仕方は他にもいろいろあります．多様体の本を参照してください)．

問．"引き戻し"について，具体的にはどのようなものですか？

答．基本的な線形代数のレベルで言うと，線形写像 (１次写像，linear mapping) $f : V \to W$ に対して，f の双対線形写像 $f^* : W^* \to V^*$ が，$\xi \in W^*$ に対して，$f^*(\xi)(v) = \xi(f(v)), (x \in V)$ で定義されます．(これは，計量を指定すれば，解析などで使う "随伴写像"と結びつくものです)．このときの $f^*(\xi) \in V^*$ が，$\xi \in W^*$ の f による引き戻しです．微分形式の引き戻しも，(多様体論として，すでに習っていると思いますが)，微分を使うことによって，同じ考え方で定義されたものです．たとえば，微分可能写像 $f = (f_1, f_2) : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$, $(u, v) \mapsto f(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v))$ に関して，$f^* dx = df_1$ です．これは，詳しく書くと，$(f^* dx)(\dfrac{\partial}{\partial u}) = (dx)(f_* \dfrac{\partial}{\partial u}) = (dx)(\dfrac{\partial f_1}{\partial u}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial u}\dfrac{\partial}{\partial y}) = \dfrac{\partial f_1}{\partial u}$ ということと，$(f^* dx)(\dfrac{\partial}{\partial v}) = (dx)(f_* \dfrac{\partial}{\partial v}) = (dx)(\dfrac{\partial f_1}{\partial v}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial v}\dfrac{\partial}{\partial y}) = \dfrac{\partial f_1}{\partial v}$ ということから微分を使って幾何的に明確に理解できます．$f^*(dx \wedge dy)$ はどうなるかというと，$f^*(dx \wedge dy) = df_1 \wedge df_2$ です．この等式も，$f^*(dx \wedge dy)(\dfrac{\partial}{\partial u}, \dfrac{\partial}{\partial v}) = (dx \wedge dy)(f_* \dfrac{\partial}{\partial u}, f_* \dfrac{\partial}{\partial v}) = (dx \wedge dy)(\dfrac{\partial f_1}{\partial u}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial u}\dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial f_1}{\partial v}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial v}\dfrac{\partial}{\partial y}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial v} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \dfrac{\partial f_1}{\partial u}\dfrac{\partial f_2}{\partial v} - \dfrac{\partial f_2}{\partial u}\dfrac{\partial f_1}{\partial v}$ (以下の計算省略) などというように理解されます．

問．$*$ がたくさん $(T^*_{\boldsymbol{v}} S^2 = (T_{\boldsymbol{v}} S^2)^*, L(F)^* \omega = 0$，余接空間，双対空間，引き戻し...) 出てきましたが，いろいろあって混乱ぎみなので，一度まとめて説明してもらえませんか？

答．まとめて説明します．ベクトル空間 V の双対空間を V^* (あるいは $V^\vee$) で表し，ベクトル空間の間の線形写像 $f : V \to W$ の双対写像を，$f^* : W^* \to V^*$ と表します．可微分写像 $g : X \to Y$ の微分写像を $g_* : T_x X \to T_y Y$ (あるいは $(g_*)_x : T_x X \to T_y Y$ あるいは $(dg)_x : T_x X \to T_y Y$) と表します．Y 上の微分形式 ω の引き戻しを $f^* \omega$ と表します．

問．section について教えてください．$U \times S^2$ をバンドルとみなしているのですか？

答．そうです．$s : U \to U \times S^2$ は，(自明な) ファイバーバンドル $\pi_1 : U \times S^2 \to U$ の section です．(つまり，$\pi_1 \circ s = \mathrm{id}_U$)．荒縄 (ファイバーの束) をきれいに切断するイメージです．ファイバーバンドル (ファイバー束，fiber bundle) の概念は幾何学の基本です．自明なバンドルでも，その考え方は十分有効です．

問．$F : U \times S^2 \to \boldsymbol{R}$ について，$dF = (d_M F, d_{S^2} F)$ とあったのですが，これは，$dF = F_u du + F_v dv + F_{x_1} dx_1 + F_{x_2} dx_2$ (x_1, x_2 は S^2 の局所座標) と考えているということでしょうか？

答．その通りです．直積多様体 $X \times Y$ における自然な同型 $T^*_{(x,y)}(X \times Y) \cong T^*_{(x,y)}(X \times \{y\}) \times T^*_{(x,y)}(\{x\} \times Y)$ による分解です．ついでに補足説明すると，$d_{S^2} F$ は S^2 方向の微分であり，$F(u, v, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{p}(u, v) \cdot \boldsymbol{v}$ なので,「$(d_{S^2} F(u, v, \boldsymbol{v}))(w) = \boldsymbol{p}(u, v) \cdot w (\forall w \in T_{\boldsymbol{v}} S^2)$」によって，$d_{S^2} F(u, v, \boldsymbol{v}) \in T^* \boldsymbol{v} S^2$ が定まります．

問．$L(F)$ がはめ込み (immersion) であることが良く理解できませんでした．// 授業で「条件より $(a\boldsymbol{p}_u + b\boldsymbol{p}_v) \cdot w = 0 (\forall w \in T_{\boldsymbol{v}} S^2)$ がわかる」とありますが，どうわかるか，もう少し教えてください．

答．$L(F) : C(F) \to T^* S^2$ は，$L(F)(u, v, \boldsymbol{v}) = (d_{S^2} F(u, v, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{v})$ が定義ですが，それが immersion であることを示すために，$\varphi \in T_{(u,v,\boldsymbol{v})} C(F)$ に対し，$L(F)_* \varphi = 0$ と仮定します．このとき，$\varphi = 0$ が導かれれば，$\mathrm{Ker}(L(F)_*) = \{0\}$ がわかり，$L(F)_*$ が単射となり，$L(F)$ が immersion であることがわかります．さて，仮定から $L(F)_* \varphi = 0$ なので，$\pi_*(L(F)_* \varphi) = 0$ つまり，$(\pi_2)_* \varphi = 0$ です．($\pi : T^* S^2 \to S^2$, $\pi_2 : U \times S^2 \to S^2$)．つまり，$\varphi$ の S^2 方向の成分は 0 です．したがって，$\varphi \in T_{(u,v,\boldsymbol{v})}(U \times \{\boldsymbol{v}\})$，要するに，$\varphi$ は U 方向のベクトルなので，$\varphi = a\dfrac{\partial}{\partial u} + b\dfrac{\partial}{\partial v}$ $(a, b \in \boldsymbol{R})$ と表されます．したがって，$L(F)_* \varphi = 0$ と，$(d_{S^2} F(u, v, \boldsymbol{v}))(w) = \boldsymbol{p}(u, v) \cdot w (\forall w \in T_{\boldsymbol{v}} S^2)$ (直前の回答参照)，から，$(a\dfrac{\partial}{\partial u} + b\dfrac{\partial}{\partial v})(\boldsymbol{p}(u, v) \cdot w) = 0 (\forall w \in T_{\boldsymbol{v}} S^2)$ を得ます．つまり，$(a\boldsymbol{p}_u + b\boldsymbol{p}_v) \cdot w = 0 (\forall w \in T_{\boldsymbol{v}} S^2)$ がわかります．ということは，$a\boldsymbol{p}_u + b\boldsymbol{p}_v \in (T_{\boldsymbol{v}} S^2)^\perp$ です．ところが，$\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v \in T_{\boldsymbol{v}} S^2$ なので，$a\boldsymbol{p}_u + b\boldsymbol{p}_v \in T_{\boldsymbol{v}} S^2$ です．したがって，$a\boldsymbol{p}_u + b\boldsymbol{p}_v = \boldsymbol{0}$ です．$\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v$ は１次独立なので，$a = 0, b = 0$ となり，結局 $\varphi = a\dfrac{\partial}{\partial u} + b\dfrac{\partial}{\partial v}$ がわかりました．(長い説明になりましたが，どこで 「$\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v$ が１次独立」という条件を用いているかということが明確な証明であり，きわめて明解ですね．このような意味で明解な説明ができる，明解な説明をしようと努力するということが，数学の特長の１つであると私 (石川) は考えます)．

問．$L(F)$ が immersion になることの証明のところで，$(T_{(u,v,\boldsymbol{v})}(U \times S^2))^\perp \subset T_{(u,v,\boldsymbol{v})}(U \times \boldsymbol{R}^3)$ が $\mathrm{Ker}(d_M \widetilde{F})_*$ に属するとあったのですが，もう少し説明してください．

答．$(u, v, \boldsymbol{v}) \in C(F)$ なので，$\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{v} = 0$ です．したがって，$\boldsymbol{v}$ 方向の法線 $\boldsymbol{v}(t) = (1 + t)\boldsymbol{v}, (t \in \boldsymbol{R})$ 上で $\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{v}(t) = 0$ です．よって，$\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(d_M \widetilde{F})_*$ となります．

問．$L(F)$ がはめ込みになることを示しているところで，これは曲面の性質を使っていて,「沈め込みだったら，はめ込みになる」ということをおっしゃっていたと思いますが，そこのところがよくわかりませんでした．

答．言葉を補わないと非常に誤解される表現ですね．$L(F)$ が immersion であることを，F が曲面から定義した高さ関数であるということを使って直接証明しましたが，言いたかったのは，実は,「$d_M F$ が $C(F)$ に沿って submersion であるということから，自動的に，$L(F)$ が immersion になることが示される」ということです．

問．$L(F)$ が immersion の証明のところで，Lemma の $d_M F$ が $C(F)$ に沿って submersion，ということが，どう

使われているのか良くわからないのですが.

答. 鋭い指摘ですね．直接的には使っていませんでしたね．高さ関数の具体的な形を見て，$L(F)$ が immersion であるということが証明されます．そのとき使っていたのは，$\boldsymbol{p}_u$ と $\boldsymbol{p}_v$ が１次独立という条件で，これは，$d_M F$ が $C(F)$ に沿って submersion であること (つまり，F が "モース族" になるという条件) と同値な条件です.

問. 曲面が放物点，楕円点，双曲点に分かれる帽子のような絵の具体例の説明を文字にしていただけないでしょうか？

答. 文字にします．帽子の上の部分では，左から右に点を曲面に沿って動かすと，(外向き) 単位法線ベクトルの方向も左から右に動き，点を手前からうしろに動かすと法線ベクトルの方向も手前からうしろの方向に動きます．したがって，ガウス写像が向きを保つことがわかります．一方，帽子の下の部分では，左から右に点を動かすとき，法線ベクトルが左から右に動くが，点を手前からうしろに動かすと法線ベクトルの方向はうしろから手前の方向に逆に動きます．したがって，この部分では，ガウス写像は向きを逆にします．このようなことが，ガウス曲率の正負で表現されるわけです.

問. 座標環について教えてください．代数幾何の話を読んだときに，Grassmannian が出て来て，そこから Plücker coordinate ring を構成したのですが，この Plücker coordinate ring と，今回の質問書の回答にある Plücker coordinate は同じ物ですか？

答. 同じものです．Plücker coordinate たちは独立ではなく，ある関係式 (Plücker relations) をみたします．(斉次座標に関する) 多項式環を，その関係式たちが生成する ideal で割ってできる環が Grassmannian manifold の座標環になるということです．平面 $\boldsymbol{R}^2$ の単位円 $x^2+y^2=1$ でたとえ話をすると，(x, y) が単位円の座標で，関係式が $x^2+y^2-1=0$ であり，$A = \boldsymbol{R}[x,y]/\langle x^1+y^2-1\rangle_{\boldsymbol{R}[x,y]}$ が座標環です.

問. ベクトルと余ベクトル (covector) の関連性がよくわかりません．余ベクトルを $\perp$ と表す理由をもう少し聞きたいです．dual space は習ったときから，唐突に視覚的でなくなる概念という印象を持っていたので，先生がどうイメージするのがよいか，を話し始めたときは興味津々だったのですが，いまひとつ分かりませんでした．どうして写像が線で表されるのですか？// 余ベクトルを $\perp$ で表すのはよいと思いますが，どちらが kernel で，どちらが 1 に対応するか区別した方がよいのでは？

答. 興味をもってくれてありがとう．ところで，製図のときなどに使う "T 型定規" を知っていますか？T の縦の棒のところに目盛りがついていて長さを測ることができます．横棒を机の縁に平行にした状態のままで，机の上のベクトルの "長さ" を測ります．斜めに向いたベクトルの "長さ" は短く，反対向きのベクトルの "長さ" は負の数になります．このような働きをするのが，余ベクトルです．(ベクトル空間から $\boldsymbol{R}$ への線形写像)．したがって，T の字で表したわけです．(ただし，活字の T には飾りがついているので，$\perp$ の方が適当ですね)．横棒が kernel を表していて，縦棒の長さが，ものさしの目盛り１単位を表しています．横棒があるので，目盛りの正の方向が自動的にきまり，紛れはありません．強いて難を言えば，零 (余) ベクトルを表示できないことですが，その難点は，矢印の場合も零ベクトルは矢印では表現できないので同じです．(余ベクトルのこのような表示法は，ヤ印ならぬ,「ト印法」とでも呼べるでしょうか).

問. 高さ関数は，誰により開発され，特異点論に応用されたのは何時からでしょうか？

答. 高さ関数自体は，微分幾何との関係で，昔から (１９世紀くらい？) 研究されていたと思います．その高さ関数と関数族の特異点論を結び付けたのは，私 (石川) の知る限り，２０世紀の６０年代から７０年代のトム (Rene Thom) さんやポーチャス (Ian Porteous) さんが最初だと思います.

問. ラグランジュはめ込み (またはその像であるラグランジュ部分多様体) の物理的な意味を教えてください．力学の本では，(運動エネルギー)−(ポテンシャル) をラグランジアンと呼んでいましたが，関係がありますか？ハミルトン vector field を積分したものと，Lagrangian submanifold は何か関係がありますか？

答. 関係はあります．物理学では，扱う系をラグランジアンで記述したり，ハミルトニアンで記述したりします．ラグランジュ部分多様体は，名前とは逆に，ハミルトニアンの方とより関係します．$2n$ 次元のハミルトン系が与えられたとき，ハミルトニアンがその上で一定になるような $(n-1)$ 次元アイソトロピイック部分多様体 ("初期条件" に相当) を，ハミルトン流で流したものがラグランジュ部分多様体になります．ラグランジュ部分多様体の物理的な意味は，というとよくわかりませんが，物理の研究から派生した数学の研究としては，ラグランジュ部分多様体は，古典力学の量子化との関係から考察され始めたようです．ちなみに，シンプレクティック空間の最大次元 isotropic subspace を "Lagrangian subspace" と最初に呼びはじめたのは，マスロフ (Maslov) だそうです．１９７０年代のことです．それほど古いことではありません．また，その道の有名な数学者ワインシュタイン (A. Weinstein) は "Everything is a Lagrangian submanifold." と書いています．参考までに.

問. シンプレクティック構造を入れる理由は何ですか？T^*S^2 上リウビル形式 θ を考えて，$\omega = d\theta$ というシンプレクティック形式を導入すると "うれしい" 理由がいまひとつぴんときません.

答. 確かにまだ説明不足ですね．これからの講義で説明していくつもりなので乞う御期待，というわけですが，こちらの思い入れを言うと，どうしてもシンプレクティック構造を入れたくなる，と言った方がニュアンスが出るかなと思います．あるいは，"数学の女神" が導入しろと言ったから，と言い換えてもよいです．そして，うれしい理由は，一言で言うと,「世界が広がること」です．曲面論が，シンプレクティック幾何あるいはラグランジュ特異点の枠組みで調べられる，そうすると，同じ方法で，たとえば，光学も調べられる，量子化も，代数解析も，偏微分方程式論も，保型関数論も関係してくる (かもしれない)，ということになります．(この講義の中で，実際にすべての可能性を説明することは無理だと思いますが).「すべての道はシンプレクティック幾何に通ず」という感じでしょうか．ともかく，世界が広がることは楽しいことです．見晴らしの良い高いところに登ると，途中は大変かもしれないけれど，楽しい．旅をして，新しい世界・人々を知ることができるのは楽しい．学問も同じで，一見関係ないことに関係があるということを発見する，それが創造というものですが，そのためには，いろいろと知っていないと始まらない，視野が広くないといけない，人間の懐が広くないとつまらない．関係ないですが，最近話題のノーベル賞を受賞した田中さんも小柴さんも，ある失敗がきっかけとなって独創的な発見をしたそうですが，失敗ができるためには，そしてその失敗を活かせるためには，失敗を活かせるだけの視野の広さ，懐の広さ，なんでそんなことをやってみる気になったのが不思議だね，と言われるような度量がないといけないそうです．そのような能力を「セレンディピティー」と呼ぶそうです．ではまた.