ガウス写像の数学 (幾何学特論４・幾何学講義８) 質問の回答

No. １ (２００２年１０月４日) の分　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

問．接空間 (tangent space) とはどういうものですか？

答． 曲面に接する平面のことです．空間 $\mathbf{R}^3$ 内の曲面 M の接空間は (２次元なので) **接平面**とも呼ばれます．(曲線の場合は，接空間は接線と呼ばれます)．もう少し詳しく言うと，曲面上の点 P の位置ベクトルを

$$\mathbf{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

とおくとき，位置ベクトルを偏微分して得られるベクトル $\mathbf{p}_u$ とベクトル $\mathbf{p}_v$ の張る平面が接平面です．さらに詳しく言い換えると，曲面上の P を通るあらゆる曲線 $c(t) = \mathbf{p}(x(t), y(t))$ の P を通る瞬間の速度ベクトル (無限小の変化) $\frac{c(t)}{dt}|_{t=0} = x'(0)\mathbf{p}_u(P) + y'(0)\mathbf{p}_v(P)$ の集まりです．(曲面上を拘束運動する物体の刻々の速度ベクトルがその曲面に接していることを観察するとわかりやすいですね)．接空間の記号は T_PM です．また，接空間の属するベクトルを**接ベクトル** (tangent vector) と言います．このような接空間の理解の仕方はかなり普遍的であり，一般次元の場合も，抽象的な多様体の場合も，この発想の延長上で接空間が定義されます．接空間は基本的な概念なので，確実に理解しておきましょう．

問． 余接空間 (cotangent space) がよくわかりません．

答． 今日の講義でくわしく説明しますが，この機会に少し説明します．余接空間は，**余接ベクトル** (cotangent vector) から形成されています．接ベクトルが,「無限小の変化」を表すものとすると，余接ベクトルは,「無限小変化を測る”ものさし”」です．曲面 M の点 P における余接ベクトル１つ１つは，接空間 T_PM から $\mathbf{R}$ への線形写像です．つまり，T_PM の各接ベクトルに対して，数値を (線形的に) はじきだすような”メジャー”とみなされます．一言でいうと，余接空間は，接空間の双対ベクトル空間 (dual vector space) です．

問． ガウス写像を視覚的にイメージしたいのですが．”特異点”は視覚的に滑らかでない点をイメージしていました．Gauss 写像の像は，単位球面あるいは，単位球面の開集合なので，滑らかでない点はないから，やはり視覚的な考え方は間違っていたのでしょうか？

答． 確かに視覚的に滑らかでない点を特異点という場合があります．間違っていません．でも，特異点という用語は，現在，もっと広い意味に使われています．この講義では，曲面のガウス写像の特異点を扱っていますが，曲面自体は滑らかで，一見特異な点はありません．この場合，曲面上の点のうち，曲面の曲がり具合が特異な点，曲がり具合が他とは違っているような点を，ガウス写像の言葉で，数学的に明確に (あいまいさを残さぬように) 定義したわけです．

問． 特異点とは具体的にどういった性質のものですか？特異点は，例えば，図形の形で数が決まったり，数が無限にあったりするものなのですか？また，一般に特異点は避ける傾向にあると思うのですが，そうした場合，その図形をどのように調べるのですか？

答． 特異な現象なので，一般的な説明をするには準備が要りますが，具体的な話なら簡単です．講義で説明しているように，ガウス写像の特異点は，ガウス曲率という関数が 0 に等しいような点です (必要十分条件)．これから分類の話もしていくので，よくわかってくると思いますが，通常，ガウス写像の特異点は曲線 (方程式 $K(P) = 0$ により定まる曲線，”放物点”の形成する曲線) に沿って現れます．そして，そのたくさんある特異点のうちでも，もっと特異な点が孤立して現れるのが普通です．詳しく調べると，**特異点にも程度がある**ことがわかるのです．ところで，特異点は場合によっては確かに避ける必要も生じるわけですが，上手に避けるためには，避けるべき特異点の性質を知らなければ危険ですね．たとえ話ですが，道を歩いていて交通事故に合わないようにするためには，車をよく見ていないと車にひかれます．車の動き方や運転者の心理を知っていた方が安全なわけです．それはともかく，これは研究上の心得なのですが，計算していて，都合のよい条件を仮定すると計算がうまくいく場合があります．じゃあ，その条件が成り立つ場合だけ考えて，成り立たない場合は無視しよう，ということに，どうしてもなりがちなのですが，やはり，都合の悪い条件に関しても，手を抜かずに，それを改めて調べてみて，全体の状況を理解しておかないと，意味のない計算を続けることになったり，重要な発見をみすみすとり逃してしまうことになってしまいます．というわけで，この講義では，特異点を無視するのではなく，逆に**特異点は，その図形の性質を一番反映している点**ではないか，特異点を通して，その図形の性質がよくわかるのではないか，というアイディアをもとに，特異点を重視する研究を紹介しているわけです．

問． 特異点の定義が，前回が「全射でない」だったのに，今回は”同型でない”になったのは何故ですか？

答． この場合は同じことだからです．特異点の条件は，点 $P \in M$ におけるガウス写像の微分写像 $g_* : T_PM \to T_{g(P)}S^2$ に関する条件ですが，g_* は，ベクトル空間 T_PM から $T_{g(P)}S^2$ への線形写像であり，$\dim_{\mathbf{R}} T_PM = 2 = \dim_{\mathbf{R}} T_{g(P)}S^2$ なので，線形代数でよく御存じのように，g_* が全射 $\Leftrightarrow$ g_* が単射 $\Leftrightarrow$ g_* が全単射 $\Leftrightarrow$ g_* が同型，です．ですから，いろいろ書き換えられるわけです．

問． 特異点と臨界点の違いを教えてください．違いがあまりよくわかりません．

答． 確かに，２次元多様体の間の写像に関してのべると区別がよくわからなくなるので，一般論で用語の違いを説明します．m 次元多様体 N から n 次元多様体 M への可微分写像 $g : M \to N$ に関して，点 $P \in M$ が g の**臨界点** (critical point) とは，g の微分写像 $g_* : T_PM \to Tg(P)N$ が全射でない，ときに言います．また，点 $P \in M$ が g の**特異点** (singular point) とは，g の微分写像 $g_* : T_PM \to Tg(P)N$ の階数 $< \min\{m, n\}$，のときに言います．補足説明をすると，g_* の**階数**とは g_* の像の次元のことです．点 P が特異点とすると，階数が $n = \dim_{\mathbf{R}} T_{g(P)}N$ よりも小さいので g_* は全射にならず，P は臨界点です．つまり，いつでも「特異点ならば臨界点」です．$m \geqq n$ のときは，$\min\{m, n\} = n$ なので,「特異点 $\Leftrightarrow$ 臨界点」ですが，$m < n$ のときは,「どんな点も臨界点で，特異点 $\Leftrightarrow$ (g_*) が単射でない」です．(現在の講義の場合は，$m = 2 = n$ です)．ところで，話を拡張する (あるいは，次元を上げる，視野を広げる，極端な場合を考える，よけいな情報をカットして抽象化する) と，話がわかりやすくなることがあります．(区別がはっきりする)．こういう発想ができることが，数学の有用な点の一つですね．

問． $C(F) = C^+(F) \cup C^-(F)$ と２つに分けるのはなぜですか？// $C^\pm(F)$ の定義は何ですか？

答． $C^\pm(F) := \{(u,v,\mathbf{v}) \in U \times S^2 \mid \mathbf{v} = \pm\mathbf{e}(\mathbf{p}(u,v))\}$ です．ここで，$\mathbf{e}$ は曲面の単位法線ベクトルです．$C(F) := \{(u,v,\mathbf{v}) \in U \times S^2 \mid F_u(u,v,\mathbf{v}) = 0, F_v(u,v,\mathbf{v}) = 0\}$ とおいたわけですが，講義で説明したように，$F_u(u,v,\mathbf{v}) = 0, F_v(u,v,\mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \pm\mathbf{e}(\mathbf{p}(u,v))$ なので，$C(F) = C^+(F) \cup C^-(F)$ と分解されます．無理して分けたということではなく，自然に分かれるわけです．

問． ガウス写像 g と $\pi_2|_{C^+(F)} : C^+(F) \to S^2$ の関係がいまひとつわかりません．//「$\pm g(u,v) = \pi_2 \circ s^\pm, s^\pm(u,v) = (u,v,\pm\mathbf{e})$ において，$s^\pm : U \to C^\pm(F)$ ははめ込み (微分写像が単射) になるので，$P : g$ の特異点 $\Leftrightarrow (g_*)_P : T_PM \to T_{g(P)}S^2$ は全射でない $\Leftrightarrow ((\pi_2|_{C^+(F)})_*)_{s^+(P)}$ が全射でない $\Leftrightarrow P : \pi_2|_{C^+(F)}$ の特異点」という説明で宜しいでしょうか？

答． 上の説明でほぼ良いのですが，$s^\pm(U) = C^\pm(F)$ ということにも注意しましょう．このことから，$s^\pm : U \to C^\pm(F)$ は，はめ込み (immersion) ですが，さらに，微分同相写像にもなっています．そして，$(\pi_2|_{C^+(F)}) \circ s^+ = g$ なので，P が g の特異点 $\Leftrightarrow s^+(P)$ が $\pi_2|_{C^+(F)}$ の特異点，ということになります．

問．「g の特異点が ($s : U \to U \times S^2$ を通して) $\pi_2|_{C^+(F)} : C^+(F) \to S^2$ の特異点に対応する」のはなぜですか？「$C^+(F)$ の critical point を π_1 で projection して，それを g で写した点が Gauss 写像の特異点である」と理解してよろしいのですか？

答． 定義としては，g の特異点は M 上にあるので，「$\pi_2|_{C^+(F)}$ の特異点を π_1 で射影した点が Gauss 写像の特異点である」というのが正確です．

問． ガウス曲率 $K = \dfrac{\begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}$ が M 上の微小面積 S と，S^2 上の微小面積 S' の比率になるところがわかりません．そもそも，面積 S と S' はどんなものなのかわかりません．

答． $S = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}$ で，$S' = \begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix}$ です．これらの行列式は，微小面積を表すという意味をもっています．

問． たとえば，ベクトル $\mathbf{p}$ が平面上にあるとき，曲率はどのような値を示しますか？

答． 平面の場合，ガウス写像は定数であり，ガウス曲率は 0 です．

問． parabolic $\Leftrightarrow K(P) = 0$, elliptic $\Leftrightarrow K(P) > 0$, hyperbolic $\Leftrightarrow K(P) < 0$ について，図で説明されたのは，なんとなくわかったのですが，式的にどうなるのか，とても気になりました．２年程前の解析の講義で，波動方程式かなにかだったと思うのですが，同じ感じのものを見ました．// $P \in M$, P : 放物的 $\Leftrightarrow K(P) = 0$, P : 楕円的 $\Leftrightarrow K(P) > 0$, P : 双曲的 $\Leftrightarrow K(P) < 0$ と定義していましたが，それぞれに何故２次曲線の名前が付いているのですが？名前の付け方の歴史的背景に興味があります．// 放物的などの分類は，いつごろからされ始めたのですか？他にも２次曲線の分類や偏微分方程式 (２次) でも習ったところから考えると，かなり広く使われているような気がします．

答． 歴史的には，やはり２次曲線の分類に由来する名前ですね．２次曲線 $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ は，$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$ が 0 のとき放物線，正のとき楕円，負のとき双曲線です．(ただし，$a = b = c = 0$ のときは除く)．ガウス曲率による曲面の分類も，”第２基本形式” $II = L(dx)^2 + 2Mdxdy + N(dy)^2$ についての同様の分類と考えられます．２階偏微分作用素 $a\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial} + c\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ の分類も同様です．このような３分法が他にあるかどうか調べてみるとおもしろいかも知れません．ところで，２次曲線が分類されたのはいつごろでしょうか？詳しくは知りませんが，デカルトやニュートンなどよりずっと古いでしょうね．

問． height function に時間パラメーターをかけて，1-parameter height function を考えたとして，曲面がどのように変化するかを調べることができると思いますが，それを Lagrange の言葉に直すことができるでしょうか？どうなるのでしょうか？

答． 曲面が時間的に変化する場合ですね．そのときは，$F(u,v,\mathbf{v},t) = \mathbf{p}(u,v,t) \cdot \mathbf{v}$ という関数族 (高さ関数族族) ができるわけですが，F のパラメーター空間を S^2 ではなく，$S^2 \times \mathbf{R}$ とみなせば，これから講義で説明するラグランジュ部分多様体が当然定義できます．(もちろん，曲面族には何らかの条件を仮定します)．こうして，ガウス写像の特異点の時間変化を調べることができます．(でも，それを実行した人がいるかどうかは知りません)．

問． $(d_\mathbf{v}F)(\eta) = \eta \cdot (F(u,v,\cdot))$ の $\cdot$ の意味は何ですか？

答． 講義で説明したように，まず，$F(u,v,\cdot)$ は，$\mathbf{v} \in S^2$ に対し，$F(u,v,\mathbf{v})$ を与えるような関数のことです．(ややカジュアルな書き方ですね)．また，$\eta \in T_\mathbf{v}S^2$ は S^2 の点 $\mathbf{v}$ における接ベクトルなので，関数の η 方向微分が定義されます．それが右辺の意味です．ここで，**方向微分**とは，接ベクトル η を初速度ベクトルにもつような曲線を１本 $\mathbf{c}(t) : (\mathbf{R}, 0) \to (S^2, \mathbf{v})$, $(c(0) = \mathbf{v})$, 任意に取り，合成関数 $F(u,v,\mathbf{c}(t))$ を考えた，その関数の $t = 0$ における微分係数 $\dfrac{d}{dt}F(u,v,\mathbf{c}(t))|_{t=0}$ のことです．(しかし，記号が分かりづらいのは良くないことなので，講義でもう一度，もっと分かりやすく説明する予定です)．

問． M の P における接空間の面積要素を $\Omega_{M,P}$, S^2 の P における接空間の面積要素を $\Omega_{S^2,g(P)}$ とおくと，$g^*\Omega_{S^2,g(P)} = K(P)\Omega_{M,P}$ とありますが，面積要素とはどういうものですか？また，g_* という記号もあるので，g^* を使うと紛らわしい気がしました．

答． 面積要素とは，接平面の２つのベクトルに対し，その２つのベクトルが作る平行４辺形の面積を測る”要素”のことです．xy 平面上なら，たとえば，$dx \wedge dy$ などと書かれるものです．(言い換えると，0 でない２次微分形式のことです．n 次元の場合なら，0 でない n 形式)．面積要素とは，いわば「面積測定機」です．それから，g_* と g^* は，最初は，確かに紛らわしく感じるかも知れませんが，g_* は接ベクトルに対し使用し，g^* は余接ベクトルや微分形式に使用するという具合に，厳格に使用法が定められているので大丈夫です．

問． この講義では Gauss-Bonnet の定理はやらないとおっしゃたのですが，やってもらいたいです．幾何学の大定理だと聞いているのですが，自分では，どの程度すごい定理なのかよくわかっていません．

答． 講義にも流れがあるので，講義で扱おうとすると他のことが説明できなくなるので，この場を借りて説明します．**ガウス・ボンネの定理**とは，(向きのついた閉じた) 曲面 M について，ガウス曲率 K を，M 上の面積要素 Ω について積分して，2π でわると，M のオイラー標数に等しい：$\chi(M) = \dfrac{1}{2\pi}\int_M K\,\Omega$，という定理です．(もう少し一般の場合にも定理が拡張されます)．ガウス曲率 (Gauusian curvature) という”局所的”な情報を積分することによって，オイラー標数 (Euler characteristic) という大域的な情報が得られるというすばらしい定理です．説明が不足していたら，また直接にでも質問書ででも質問してください．何でも (できる限り) 説明します．

問． 講義中に「Weyl とか◯◯はドイツの人なんだけど」とありましたが，聞き取れなかったので興味があります．

答． Siegel という人です．ちなみに，数学者で，Gauss や Weyl や Siegel の業績を高く評価する人はかなり多いと思います．(他にも偉大な人はたくさんいます)．

問． プリュッカー座標について教えてください．// linear complex group がわかりません．// linear complex や pencil について，もう少し詳しいことが知りたいのですが．

答． 少し長くなりますが，説明します．プリュッカー座標 (Plücker coordinates) とは，グラスマン多様体 (Grassmannian manifold) を，より次元の高い射影空間に埋め込むときの座標のことです．グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}(k, \mathbf{R}^N)$ とは，$\mathbf{R}^N$ の中の k 次元部分ベクトル空間の全体の集合です．たとえば，$\mathrm{Gr}(1, \mathbf{R}^N)$ は，１次元部分ベクトル空間の全体の集合です．部分ベクトル空間１つ１つをそれぞれ要素 (点) だと考えています．ここで大切なことは，これらが単なる集合ではなく，「多様体」の構造をもつ，局所的にきれいな座標を導入できるということです．たとえば，$\mathrm{Gr}(1, \mathbf{R}^N)$ は，いわゆる $N-1$ 次元**射影空間** (projective space) $\mathbf{R}P^{N-1}$ です．$\mathbf{R}^N$ の１次元部分ベクトル空間の基底を $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N) \neq \mathbf{0}$ とするとき，その１次元ベクトル空間は，$\mathbf{a}$ の成分の比 (ratio) だけで定まるので，$[\mathbf{a}] = [a_1, a_2, \dots, a_N]$ と表します．これを，**斉次座標** (同次座標) とよびます．斉次座標の成分は N 個ありますが，比を考えているので，自由度は $N-1$ です．たとえば，a_1 ならば，$[a_1, \dots, a_N] = [1, \dfrac{a_2}{a_1}, \dots, \dfrac{a_N}{a_1}]$ であり，$\dfrac{a_2}{a_1}, \dots, \dfrac{a_N}{a_1}$ ($N-1$ 個) が局所座標系になります．これを**非斉次座標**とよびます．さて，次に，$\mathrm{Gr}(2, \mathbf{R}^N)$ ($\mathbf{R}^N$ の２次元部分ベクトル空間の全体の集合，$N \geqq 2$) を考えましょう．$\mathbf{R}^N$ の２次元部分ベクトル空間の基底を $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ($\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は１次独立) とします．御存じのように，ベクトル空間の基底の取り方は１通りでなく，$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_N \\ b_1 & b_2 & \dots & b_N \end{pmatrix}$ の２次小行列式たちの比だけで，２次元部分ベクトル空間が定まります．２次小行列式の個数は，N 個のものから 2 個とる組み合わせの数 $\dfrac{N(N-1)}{2}$ だけあります．この $\mathbf{R}P^{\frac{N(N-1)}{2}-1}$ における斉次座標 $\left[\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{N-1} & a_N \\ b_{N-1} & b_N \end{vmatrix}\right]$ のことを**プリュッカー座標**とよびます．ただし，自由度は，$\dfrac{N(N-1)}{2} - 1$ にはならず，もっと少なく，$2(N-2)$ です．外積 (グラスマン) 代数のことを思い出すと，２次元部分ベクトル空間は，外積 $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \in \mathbf{R}^N \wedge \mathbf{R}^N \cong \mathbf{R}^{\frac{N(N-1)}{2}}$ の生成する１次元部分ベクトル空間で定まり，$\mathrm{Gr}(2, \mathbf{R}^N)$ が $\mathrm{Gr}(1, \mathbf{R}^N \wedge \mathbf{R}^N) = \mathbf{R}P^{\frac{N(N-1)}{2}-1}$ の中に埋め込まれるわけです．ところで，古典的に，グラスマン多様体の中の”１次元”部分集合を pencil, ”２次元”部分集合を net, ”３次元”部分集合を web, ”余次元 1” の部分集合を complex と呼ぶ習慣があります．(正確には，単なる部分集合ではなく，次元が明確に定まったものを扱う)．そうして，プリュッカー座標に関して，射影空間の中で，１次式で表されるような complex を linear complex と呼んだわけです．さて，以降は，$\mathbf{R}^N = \mathbf{R}^{2n}$ で，$\mathbf{R}^{2n}$ に”シンプレクティック構造” $\omega = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i^* \wedge \mathbf{e}_i^*$ が与えられているとします．ここで，$\mathbf{R}^{2n}$ の基底を $\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{f}_n$ とし，双対ベクトル空間 $\mathbf{R}^{2n*}$ の双対基底を $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{f}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{f}_2^*, \dots, \mathbf{e}_n^*, \mathbf{f}_n^*$ としています．このとき，アイソトロピック・グラスマン多様体を $\mathrm{Gr}_I(2, \mathbf{R}^{2n}) := \{[\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}] \in \mathrm{Gr}(2, \mathbf{R}^{2n}) \mid \omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0\}$ で定義します．これは，$\mathrm{Gr}(2, \mathbf{R}^{2n})$ の中の linear complex になります．というのは，条件 $\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{f}_i^* \wedge \mathbf{e}_i^*)(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ は，各 $(\mathbf{f}_i^* \wedge \mathbf{e}_i^*)(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ がプリュッカー座標なので，プリュッカー座標の和 $= 0$ の形の１次式になっているからです．１次式で定義されるので，歴史的に，一時期 linear complex と呼ばれたわけですね．そして，シンプレクティック構造をたもつような $\mathbf{R}^{2n}$ の１次変換全体は linear complex group と呼ばれていたわけです．現在では，**シンプレクティック群**と呼ばれて，$\mathrm{Sp}(\mathbf{R}^{2n})$ とか $\mathrm{Sp}(n)$ などと表されています．

問． ガウス写像の関連領域について教えてください．ガウス写像が制御理論と結びついていましたが，この制御理論とは，コンピューター等で使われる制御理論のことでしょうか？また，ガウス写像は，どのようにして制御理論と結びついているのでしょうか？

答． 制御理論は，いまでは．いろいろな分野でいろいろな意味に使われているので，皆さんが思っているものと，私が考えているものが少し違うかもしれませんが，たとえば，ロケット (ミサイル) の弾道の研究などに関連して生まれた**最適制御** (optimal control) の理論や変分法 (variational method) などのことです．制御理論の大切な問題は，与えられた拘束条件のもとで，ある状態から出発して，別の指定された状態にいかに早く (いかに最短経路で) 到達するか，ということです．ここで各状態は，関係する変数の分だけの次元をもつ状態空間上の点として表され，拘束条件は，たとえば，その状態の変化に関する条件，つまり接ベクトルに関する条件で表されます．そうすると，そのような制御の問題が，多様体 M と，その上の接束 (tangent bundle) の部分ベクトル束にリーマン計量を設定し，その部分ベクトル束に接する曲線のうち，計量に関して最短経路を求める問題に帰着されます．さらに，その最短経路を求める問題はシンプレクティック幾何やラグランジュ特異点論などを用いて研究されています．このように，制御理論は，ガウス写像の関連するシンプレクティック幾何 (ハミルトン幾何) や部分リーマン幾何 (カルノー・カラテオドリ幾何) を仲立ちとして関連します．部分リーマン幾何は最近盛んなロボット工学などへも応用があるようです．また，曲面は，物質の界面として現れるので，**界面の形状をガウス写像を見て制御する**という研究もありえますね．一見して関連が明らかでないことほど，その関連が何か見つかれば，今まで知られていないすばらしい応用が発見される可能性も高いので，異なる分野のつながりを見ようとする姿勢は非常に大切ですね．