E-mail 勉強会情報抄録 (２００３年１１月．文責 石川 剛郎)

【 レビュー集 Motivic 編 】

過去のモチーフ積分テキスト (２００３年１１月３日 (月)〜１１月１７日 (月)，１０月６日 (月)〜１０月２０日 (月))

Willem Veys, Arc spaces, motivic integration and stringy invariants, in the 12th MSJ–IRI "Singularity Theory and Its Applications" ed. by S. Izumiya, G. Ishikawa, T. Sano and I. Shimada, Hokkaido University Technical Report Series in Mathematics, Series # 78 (September 2003), pp. 255–277.

過去のモチーフ積分テキスト (2003 年８月４日 (月) から８月１８日 (月))

J. Denef, F. Loeser, Geometry on arc spaces of algebraic varieties. European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000), 327–348, Progr. Math., 201, Birkhauser, Basel, 2001.

4. Motivic integration and the Proof of Theorem 3.2.
5. The motivic Thom-Sebastiani theorem.
6. The arithmetic motivic Poincaré series $P_{arith}(T)$.

過去のモチーフ積分テキスト (2003 年７月７日 (月)〜７月２１日 (月))

J. Denef, F. Loeser, Geometry on arc spaces of algebraic varieties. European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000), 327–348, Progr. Math., 201, Birkhauser, Basel, 2001.

1. Introduction.
2. The arc space of a variety.
3. The motivic zeta function of a regular function.

過去のモチーフ積分テキスト (2003 年６月９日 (月)〜６月２３日 (月))

A. Craw, An introduction to motivic integration, arXiv:math.AG/9911179

4. Calculating the motivic integral.
5. The McKay correspondence.

過去のモチーフ積分テキスト (2003 年５月１２日 (月)〜５月２６日 (月))

A. Craw, An introduction to motivic integration, arXiv:math.AG/9911179

2. Construction of the motivic integral.
3. Hodge numbers via motivic integrations.

A. Why 'motivic' integration?

２００３年６月２３日

Batyrev の証明の可換な場合の証明 (pp.27–28) を読みました． よくわかりませんでした．それで，Reid のブルバキセミナーの解説を 読もうかなと思いました．

２００３年６月１７日

Motivic の方は， 4.1 は眺めて，4.2 の examples はスキップしました． (解説の仕方にオリジナリティーを感じなかった)． 現在第５章の Reid による一般化された McKay 対応の予想に対する， Batyrev の証明の可換な場合の証明 (pp.27–28) を読み始めたところです．

現在のモチーフ積分テキスト (2003 年６月９日 (月)〜６月２３日 (月))

A. Craw, An introduction to motivic integration, arXiv:math.AG/9911179

4. Calculating the motivic integral.
5. The McKay correspondence.

２００３年５月３０日　小池敏司さんのメール．

兵庫教育大学の小池です。

E-mail 勉強会の泉さんの質問を拝見しました。

「よくわからないことは， p.8 の measure につける $\mathbf{L}$ の指数 $-n(k+1)$ のとり方です． あとの計算の中で活きているのでしょうが 実感的に納得していません.」Adam との motivic に関する最近の共著の論文において、 我々も Denef-Loeser に習って同様の指数をつけました。cylinder set $C = \pi_k^{-1}(B_k)$ なら、$s > k$ に対しても、 $C = \pi_s^{-1}(B_s)$ と書けています。B_{k+1} は $B_k \times \mathbb{C}^n$ のようなものであり、 $\mathbb{L} = [\mathbb{C}]$ と $[B_{k+1}] = [B_k \times \mathbb{C}^n] = [B_k] \cdot [\mathbb{C}^n]$ から、このように指数をつけることにより、 cylinder set に対する measure が well-defined に なります。

２００３年５月２８日　泉 脩藏さんによるレビュー

Craw は電車などで時間を見つけて第３節の途中まで 読みました．2.2 は Kuo さん，小池さんと書いた 福井不変量でやったことと同じようなことでした． 全般に上手くこなしてあるので読みやすいが，代数幾何学の重みがのしかかる Introduction と，３節は，まあ呪文のようなものと解釈して勝手に安心しています．よくわからないことは， p.8 の measure につける $\mathbf{L}$ の指数 $-n(k+1)$ のとり方です． あとの計算の中で活きているのでしょうが 実感的に納得していません．並べて abstract も concrete も，作るは楽，学ぶは苦 ということになりますか．(楽は楽しいということです.)

Non-holonomic は興味があるけど時間が無いので 本をながめただけです．昨今，生来のメモリー狭小性と加齢による揮発性の multiplicative な作用により， 砂に書いた恋文のような勉強の道です．

テキスト (2003 年５月１２日 (火)～５月２６日 (火))：

A. Craw, An introduction to motivic integration, arXiv:math.AG/9911179

2. Construction of the motivic integral.

3. Hodge numbers via motivic integrations.

A. Why 'motivic' integration?

2003 年５月 26 日

今週は，主に２節を読み直しながら，複素多様体上の non-holonomic system に対する integral (horizontal) formal arc space に対して，motivic integration の理論 (つまり，motivic integration with differential equations) が 展開できるか，妄想を重ねておりました．

2003 年５月 20 日

2.1 では，複素多様体 Y 上の formal arcs (infinite jets) の空間 $J_\infty(Y)$ を導入し，2.2 では，複素多様体 Y の effective divisor (超曲面) D に対し，その divisor と formal arc との intersection number により， formal arcs の空間上の関数 F_D を定義し，2.3 では，formal arcs の空間 $J_\infty(Y)$ 上の測度を定義している． ただし，測度の値が，complex algebraic varieties の Grothendieck ring を，$L = [\mathbf{C}]$ で localize したものの completion (p-adic number を作るときのような？) に値をとるところがミソ．2.4 で，その測度について F_D を積分して，motivic integral を定義し，D が normal crossing の場合に， motivic integral の計算公式を与えている．2.5 では，さらに， motivic integral の”座標変換公式”を (”discrepancy divisor” を使って) 与えている．

3.1 では，mixed Hodge structure と Hodge-Deligne number を 説明し，complex algebraic variety X に対し，E-多項式 (Euler (?) polynomial) $E(X) \in \mathbf{Z}[u, v]$ を定義している．3.2 では，２節の motivic integral を使って，stringy E-function $E_{st}(X)$ を定義し，Kontsevich の定理：「高々 Gorenstein 標準特異点のみをもつ complex algebraic variety の crepant resolution $Y \to X$ に対し，Y の Hodge 数は，crepant resolution の選び方に依らない」 の証明を，stringy E-function が crepant resolution の 取り方に依らないことに注目することで与えている． (crepant resolution $\Leftrightarrow$ 標準因子の引き戻しが 標準因子)．

Appendix では，Chow motive との関係について触れている．

【 レビュー集 Non-holonomic 編 】

過去の非ホロノーム幾何テキスト (２００３年１１月３日 (月)～１１月１７日 (月))

R. Montgomery, A Tour of Subriemannian Geometry, Their Geodesics and Applications. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 91, 2002.

Ch. 14 Falling, Swimming and Orbiting.

で，終わりです.

過去の非ホロノーム幾何テキスト (２００３年１０月６日 (月)〜１０月２０日 (月))

R. Montgomery, A Tour of Subriemannian Geometry, Their Geodesics and Applications. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 91, 2002.

Ch. 12 Classical particles in Yang-Mills fields.

Ch. 13 Quantum phases.

過去の非ホロノーム幾何テキスト (２００３年９月１日 (月)〜９月１５日 (月))

R. Montgomery, A Tour of Subriemannian Geometry, Their Geodesics and Applications. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 91, 2002.

Ch. 10 Open problems.

Ch. 11 Metrics on bundles.

過去の非ホロノーム幾何テキスト (2003 年８月４日 (月) から８月１８日 (月))

R. Montgomery, A Tour of Subriemannian Geometry, Their Geodesics and Applications. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 91, 2002.

Ch.8: The tangent cone and Carnot groups

Ch.9: Discrete groups tending to Carnot geometry

過去の非ホロノーム幾何テキスト (2003 年７月７日 (月)〜７月２１日 (月))

R. Montgomery, A Tour of Subriemannian Geometry, Their Geodesics and Applications. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 91, 2002.

Ch.7: Cartan's approach.

Appendix D: Calculus of the endpoint map and existence of geodesics.

過去の非ホロノーム幾何テキスト (2003 年６月９日 (月)〜６月２３日 (月))

R. Montgomery, A Tour of Subriemannian Geometry, Their Geodesics and Applications. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 91, 2002.

Ch.5 Singular curves and geodesics.

Ch.6 A zoo of distributions.

過去の非ホロノーム幾何テキスト (2003 年５月１２日 (月)〜５月２６日 (月))

R. Montgomery, A Tour of Subriemannian Geometry, Their Geodesics and Applications. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 91, 2002.

Ch.1 Dido meets Heisenberg.

Ch.2 Chow's theorem: Getting from A to B.

Ch.3 A remarkable horizontal curve.

Ch.4 Curvature and nilpotentization.

２００３年７月２２日　森本 徹さんによるレビュー

Montgomery の本 Chap. 7 の introduction (pp.95- 96) で，著者はこう書いている：B. Bor and I, with the help of B. Bryant, showed that the largest possible symmetry algebra for the elliptic distributions of growth (4,7) is the 21-dimensional Lie algebra sp(2,1). ... The method provides a way to realize these maximal-dimensional symmetry algebras, as well as all of the possible small symmetry algebras. I know of no other method can yield results approching these. しかし， the 21-dimensional Lie algebra sp(2,1) に到るのには，もっと簡明な（少なくとも筋道のよく分かる） 道があります.

また　pp. 96 , 3 行目からの文：A warning is in order. The Cartan method of equivalence is sometimes referred to by experts as an algorithm. I have found it as much an art as an algorithm. ... を目にし，それを algorithm と明言しうる資格をもった人がいるだろうか． しかし art に止まっていてはいけない.... などと独り言を言っています.

以下の順に，少しコメントしたいと思います.

１．The Cartan method of equivalence とその後の発展.

２．幾何構造の方法，特に，巾零幾何の方法が subriemannian structure にどのように適用されるか.

３．Subriemannian contact manifold.

４．The elliptic distributions of growth (4,7).

１．The Cartan method of equivalence とその後の発展（Morimoto 93 の序文，あるいは Morimoto 02 pp219-220 参照）.

２０世紀はじめ．カルタンは無限次元リー群の構造を明らかにするために 今日の G-構造にあたるものを考え，任意の無限次元リー群は， ある G-構造の同型群として定義されることを示し，G-構造の構造方程式を確立 している．

群が無限次元ならば G-構造は infinite type となり，ここでは特に involutive な G-構造が involutive な偏微分方程式系と結びつき重要な 役割を演じる．

G-構造が finite type の時は，同型群は有限次元リー群となり，この G-構造に たいする同値問題は，絶対平行性の幾何に帰着し，解析的には常微分方程式に 帰着する．

Cartan は Klein の思想を発展させ，絶対平行性の中でも特に重要なものとして， espace generalise (即ち，カルタン接続を持つ bundle) というものを創案した． この構造においてはその不変量が群論的に分かりやすい形で表されるのが 大きな特徴・利点である．

与えられた構造に対して，常にカルタン接続が付随するわけではない． 従ってカルタン接続を構成することは特別重要な意味を持つことになる． カルタンは１９１０年の５変数での Pfaff 系の論文おいて，growth (2,3,5) の distribution に対して巧妙難解な方法でカルタン接続を構成している．（ Montgomery の本でも何度も言及されている）．また，後に，射影構造，共形構 造，３次元 CR 構造 に対してもカルタン接続を構成している．

５０年代に入り Ehressmann らによりカルタンの方法はようやく現代的な概念 の中で定式化され出す． G-構造の定義は Chern によって与えられる．

Singer-Sternberg の論文は G-構造と Lie pseudo-group について極めて明解な考察を 展開しカルタンの方法の重要な側面を現代的な立場から明らかにする．しかし，これによってカルタンのアイデアと方法が完全に明らかになった わけではない．第１に，上述のカルタンの５変数の論文がその典型的な例だが，カルタン接続の 構成は，G-構造の理論だけからは容易には説明ができない．

第２に，幾何構造の同値問題を一般的に考察し遂行するのに G 構造の枠組み だけでは不十分である．田中は，CR 構造にたいするカルタン接続の構成やカルタンの５変数の論文の 研究を通して，それらをさらに発展させ「微分式系の幾何」を展開する． 我々が巾零幾何と呼ぶものはここから始まる．単純リー環に付随した幾何構造に 対するカルタン接続の構成は特に重要な成果である．

森本は，tower の概念を導入し，フイルター付き多様体上の tower という定式化 の中で幾何構造の同値問題を一般的に考察する枠組みを構築する．ここにおいて G-構造，カルタン接続，微分式系の理論が統一的な視点の中で融合される． weighted involutive の新概念が infinite type の時には中心的な役割を演じ， finite type の時は，カルタン接続が存在するための（おそらく best possible な ）判定条件がが得られ， 簡明な構成法が与えられる．

また，カルタン接続ができるとき，不変量の在処を特定するのに， 対応するリー環に付随した generalized Spencer cohomology group を計算する ことが重要となる．山口は Kostant の方法を用いて詳しく計算を遂行している．一方，Chern, Gardner, Bryant の系譜がある．カルタンの方法の実践的応用の 流派というべきだろうか，Montgomery はこの流れを汲んでいる． Singer-Sternberg を引用していないのも特徴的だが，通常は frame bunndle を 用いるのを coframe bundle で通しているのもおもしろい．

References (incomplete):

É. Cartan, *Sur la structure des groupes infinis de transformations,* Ann. École Norm. Supp. **21**, (1904), 153–206, (1905), 219–308.

É. Cartan, *Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre,* Ann. École Norm. Supp., **27** (1910), 109–192.

É. Cartan, *Notice sur les travaux scientifiques,* Élie Cartan Oeuvres complètes, Partie 1, Volume 1 (1952).

T. Morimoto, *Geometric structures on filtered manifolds.* Hokkaido Math. J., **22** (1993), 263–347.

T. Morimoto, *Lie algebras, geometric structures and differential equations on filtered manifolds,* Advanced Studies in Pure Mathematics, **37** (2002), 203- 252.

I. M. Singer and S. Sternberg, *On the infinite groups of Lie and Cartan, I* J. Analyse Math., **15** (1965), 1–114.

N. Tanaka, *On differential systems, graded Lie algebras and pseudo- groups,* J. Math. Kyoto Univ., **10** (1970), 1–82.

N. Tanaka, *On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras,* Hokkaido Math. J., **8** (1979), 23–84.

K. Yamaguchi, *Differential systems associated with simple graded Lie algebras,* Adv. Studies in Pure Math., **22** (1993), 413–494.

K. Yamaguchi and T.Yatsui, *Geometry of higher order differential equations of finite type associated with symmetric spaces,* Adv. Studies in Pure Math., **37** (2002), 397–458.

２．幾何構造の方法，特に，巾零幾何の方法が subriemannian structure にどのように適用されるか．(M, D, g) を subriemannian structure とする．ここで D は TM の subbundle, g は D 上のリーマン計量である．

g は F^{-1} 上の計量を与えているので，(M, D, g) はフィルター付き多様体 (M, F) 上の幾何構造と捉えることができ． まさに巾零幾何の方法が適用されるのである． （(M, F) の各点 x において，symbol algebra と呼ばれる階数付き巾零リー環 gr_xF が決まる．この巾零リー環を空間の第１近似として展開される幾何理論を 巾零幾何と呼んでいる.）

この方向での最初の基本的な結果は，任意の subriemann 構造 (M, D, g) に対して，然るべき regularity condition の 下では，これに付随したカルタン接続が構成できる，ということである．カルタン接続の構成には，森本の判定法と構成法を適用する． （この結果は今年１月の呉での研究集会で報告した.）

このようにして，subriemann 構造の不変量は原理的には付随するカルタン接続 の曲率から得られることになるが，subriemann 構造に対応する symbol algebra は 多様で変化に富んでいるので各論が重要になり，いろいろな問題がある．

３．Subriemannian contact manifold.

最も簡単な non-trivial な subriemann 構造の一つは subriemaniann contact manifold であろう．subriemaniann contact manifold の curvature というべき 不変量はどのように見つかるだろうか． ３次元の場合，Montgomery の本にかなり詳しく説明されているが，この場合でも既にかなり込み入っている．

我々の方法によると，３次元に限らず一般次元の場合にも，カルタン接続を構成 することにより曲率の在処がはっきりと分かる．

これを元にして，等質な subriemannian contact manifold を分類することは ある程度実行可能な興味深い問題だが，これについては大学院生の北川君と 研究を進めている．

４．The elliptic distributions of growth (4,7)

Montgomery は 彼自身 art と言いたくなるような複雑巧妙な方法で elliptic distributions of growth (4,7) の automorphism group は高々２１次元で，この最高次元に達するとき symmetry algebra は sp(2,1) になることを示している．

これは，カルタンの５変数空間の Pfaff 式系と並んで，カルタン接続のできる 興味深い例である．(M, D) を７次元多様体上の rank 4 の distribution とする． これが growth (4, 7) で Montgomery の意味で elliptic type ならば， D から決まる filtration は深さが２で，その symbol algebra $g_- = g_{-2} \oplus g_{-1}$ は次の形で与えられる： $g_{-1} = Q$ (the quaternios), $g_{-2} = P$ (the pure quaternions) $[x, y] = -x^t y + y^t x$ (for $x, y \in Q$). このリー環 g_- の prolongation は単純リー環 $sp(2, 1)$ になることが確かめられる．従って，田中の定理により $sp(2, 1)$ 型のカルタン接続が構成できるのである．

これはまた CR 構造の quaternion 版とみることもできる．

なお，hyperbolic distributions of growth (4,7) に対しても同様であると 書いてあるが，まだゆっくり考えていない．

２００３年7月２２日 石川 剛郎によるレビュー

Montgomery の本の第７章のレビュー (つづき)

7.9 では，Cartan の方法の筋道を説明し，キーとなる ”framing lemma” を手際良く証明している．さらに，その一般論をまず Riemann 多様体の局所自己同型群の次元の 評価に応用している．

7.10 では， ３次元の場合の接触構造上の sub-Riemann 構造の場合の 局所不変量を決定している．Agrachev, Gauthier 達の局所不変量との 関連については open か．7.9 と 7.10 はもう一度読み返したい節である．

7.11 では，pseudoconnection の必要性を注意し，7.12 では， (4, 7) タイプの distribution の局所同型群の次元の評価を与えている．

２００３年７月１５日　石川 剛郎によるレビュー

Montgomery の本の第７章のレビュー

第７章は，distribution の分類問題に対する Cartan の方法の紹介である．

7.1 では Keywords である "reduction" と "prolongation" が提示される．

7.2 では，Riemannian surface Q (リーマン面．あくまで oriented 2 次元リーマン多様体の意味． しかし，$SO(2) = U(1)$ なのでもちろん Hermite 複素構造が入る) の orthonormal coframe bundle B の上の tautological one form Θ を導入し， connection 1-form α と Gauss curvature K を説明している．

7.3 は G-構造の解説である ($G \subseteq GL(n, \mathbf{R})$).

この本の主対象である distribution や sub-Riemannian structure も G-構造である！

7.4 は G-structure 上の tautological 1-form を定義している． そして，基本的な命題「G が連結のとき， 二つの G-structure が局所同値 $\Leftrightarrow$ tautological 1-forms を移し合う局所微分同相写像がある」 を紹介している．

7.5 では (equivariance を仮定しない)pseudo-connection と torsion を，7.6 では torsion space $H(\mathfrak{G}) = H^1(V, \mathfrak{G})$ $(V = \mathbf{R}^n)$ と intrinsic torsion を導入している．

7.7 では， distribution に対して，7.5 の意味の intrinsic torsion と 第４章の 意味の curvature が一致することを注意している．

7.8 では，Riemannian case は torsion space が消えることを 説明している．ああ，おもしろかった．

現在の非ホロノーム幾何テキスト (2003 年７月７日 (月) から７月２１日 (月))

R. Montgomery, A Tour of Subriemannian Geometry, Their Geodesics and Applications. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 91, 2002.

Ch.7: Cartan's approach.

Appendix D: Calculus of the endpoint map and existence of geodesics.

２００３年７月７日　石川 剛郎によるレビュー

Montgomery の本の第６章のレビュー

この章では，non-holomorphic 幾何の舞台となる manifold-with-distribution のいろいろな例， contact, Engel, Grousat, Jet, rolling surface, ... を説明している．

個人的には，6.10 の instanton distribution (quaternionic Hopf fibration) と Mostow rigidity の関係の部分 の説明が目新しかった．

２００３年７月４日　足立二郎さんから

まず，これは少し注意しなければいけないと思うのですが， どこからか，"type (n, k)" と "with growth vector (a, b)" が 混乱していると思います．

例えば， P86. L-11. の type(3,5) and of (2,3,5) は，growth vector だと思います．

あと，ミスプリントと思われるのは，次のものです．

P86. L-3. $w\colon \mathcal{E}^\perp \to \bigwedge^2 \mathcal{H}^* \longrightarrow w\colon \mathcal{E}^\perp \to \bigwedge^2 \mathcal{E}^*$

P86. L-3. $\bigwedge^2 \mathcal{H} \to TQ/\mathcal{E} \longrightarrow \bigwedge^2 \mathcal{E} \to TQ/\mathcal{E}$

P87. L+15. $P\mathbb{H}_q \longrightarrow P\mathcal{H}_q$

P87. L-7. $\ker(w(\lambda) \longrightarrow \ker(w(\lambda))$

P87. L-3. $5.4 \longrightarrow 5.5$

２００３年６月２３日

Montgomery の本の第５章のレビュー (石川 剛郎，つづき)

5.3 では，singular geodesic と regular geodesic と normal geodesic と abnormal geodesic の違いを明解に解説している．5.4 で，特に rank 2 の場合に言及している．

5.3 では，distribution がその singular curves だけによって確定するか，という determinacy problem を扱っている．特異点の分類の問題意識に近いものを感じる． 5.6 では，関連して，fat distribution の概念を導入し，性質を調べ，例を与えている．

第６章は読み始めたばかりである．

２００３年６月１７日

Montgomery の本の第５章のレビュー (石川 剛郎，途中)

5.1 は，特異曲線 (singular curve) の定義を与えている． singular curve は，終点写像 (endpoint mapping) の特異点である．endpoint mapping は， １点から発する水平曲線 (horizontal curve) に対して，その終点を対応させる写像である． したがって，endpoint mapping は，horizontal curves (integral curves) の空間からの 写像である． その写像の「特異点」を議論するためには， horizontal curves の空間に「微分構造」を入れなければならない． 微分構造の詳細は，Appendix D に書いてある．

5.2 では，characteristic の概念を説明し，singular curve と characteristic の同値性を，endpoint mapping の微分を調べる ことにより証明している．おもしろい．なかなかの力作な (= 解説の仕方のオリジナリティーが高い) ので， 読むスピードがガクンと落ちてきました．大切な絵本を楽しみながらゆっくり読む 子供のような心境です．

現在の非ホロノーム幾何テキスト (2003 年６月９日 (月)〜６月２３日 (月))

R. Montgomery, A Tour of Subriemannian Geometry, Their Geodesics and Applications. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 91, 2002.

Ch.5 Singular curves and geodesics.

Ch.6 A zoo of distributions.

２００３年６月６日 (石川 剛郎)

Montgomery の本の２章の内容は，Chow の定理と，それに関係して， Ball-Box Theorem (球箱定理) を紹介している． また，Hausdorff measure，Hausdoeff dimension について論じている．Chow(-Rashevsky) の定理は,「distribution が bracket degerating で，base manifold が connected のとき， 任意の２点が，horizontal (integral) curve で結べる」というものだが， これは，non-holonomic distribution の一番注目すべき性質であろう．

第２章は，基本的部分なので，また日を改めて読み直したいと思っている．Montgomery の本の４章の内容は，sub-Riemannian metric を与える前の， non-holonomic (bracket generating) distribution に関する基本的な構成， すなわち，曲率と，nilpotent graded Lie algebra (nilpotentization) の 導入である．

4.1 では，distribution の曲率を定義し，4.2 では， その dual と，外微分との関係を論じている． 4.3 では，distribution に対応する differential forms の ideal から構成される derived ideals を導入し，4.4 では， distribution の ”regular point” に対し nilpotentization を定義している．4.5 では， Carnot group の定義を与えている．nilpotent Lie algebra に対し，単連結 nilpotent Lie group が対応するが， その Lie algebra が”最低次数”の部分で生成される場合， その 単連結 nilpotent Lie group を Carnot group と呼んでいる． したがって，もともとの distribution が bracket generating の場合，各点に対して，Carnot group が定まるわけである．4.6 では，non-regular point での nilpotentization に関して 少しだけ触れている．Engel algebra の文字が見える．4.7 に nilpotentization の歴史的コメントが簡単に記されている． 誰か，この部分を補ってほしい．

２００３年６月３日 (石川 剛郎)

Montgomery の本の３章の内容は，abnormal minimizer (Hamiltonian flow line の projection ではない geodesic) の存在についてである． Mongomery によって最初に確認されたこの事実の， Liu-Sussmann による証明を紹介している． 個人的には， p.41 の，Sub-Riemannian metric を与えたときに，それに関する orthonormal frame を簡単に形にするような座標をとっていく，という手法は参考になった． (Martinet normal form 上の metric の標準形を考える， というのではないところが参考になった．同じことだけど)．3.9 の歴史的レビューは一読に値する． Lagrange 乗数法の誤った使用の話は教訓的である．

テキスト (2003 年５月１２日 (火)〜５月２６日 (火))：

R. Montgomery, A Tour of Subriemannian Geometry, Their Geodesics and Applications. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 91, 2002.

Ch.1 Dido meets Heisenberg.

Ch.2 Chow’s theorem: Getting from A to B.

Ch.3 A remarkable horizontal curve.

Ch.4 Curvature and nilpotentization.

2003 年５月 20 日 (石川 剛郎)

第１章：sub-Riemann 幾何の導入のうまさにうなる． Heisenberg group の場合の具体的な計算を交えながら，手際良く， Hamiltonian geometry と関係した基本概念を導入している． Lorentz 方程式や calibration などと関連させていて面白く読める． 1.9 で Hamilton-Jacobi 理論を使って calibration を構成し， normal geodesic (sub-Riemann Hamiltonian flow の射影) が 局所最短曲線であることの証明を与えている． 1.10 の Examples は，sub-Riemann 幾何や非ホロノーム幾何の 動機付けとなるものであり，一読に値する．

【 質問箱 】

質問箱の質問に関する回答というかコメントですが，

質問２ (N)：(Montgomery の本の) Theorem2.2(Chow's theorem) のところで 逆は成り立たないのですが，どんな条件の時成り立つのでしょうか？ 条件をなんか加えて逆が成り立つ のはいつか.

について，Montgomery の本の Appendix C の Sussmann の定理や Ambrose-Singer の定理が，この質問に対する答え (の一部) になるようです． この質問 2(N) は非常に良い問いであったということですね．(2003.6.17 石川剛郎)

質問３ (N)：Montgomery の本の pp. 45–46 に，変分法において C^1-topology は correct topology ではなく，H^1-topology が correct topology であり， Martinet curve は，H^1-topology を入れた variety の singularity である，云々，とありますが，これはどういうことでしょうか？ 誰か，説明してもらえませんか？

質問２ (N)：(Montgomery の本の) Theorem2.2(Chow's theorem) のところで 逆は成り立たないのですが，どんな条件の時成り立つのでしょうか？ 条件をなんか加えて逆が成り立つのはいつか.

質問１ (M)：Craw の論文の p.12 で $\dfrac{1}{L^i-1}$ は R (R は $K_0(V_{\mathbf{C}})[L^{-1}]$ の completion) の中で ちゃんと意味を持つのですか？ $\dfrac{1}{L^i-1}=\dfrac{1}{L^i(1-L^{-i})}=L^{-i}(1+L^{-i}+L^{-2i}+\cdots)$ と考えるのでしょうか？

【 misprint(?) 情報 】

M = Motivic, N = Non-holonomic, P = Page, L+ = Line from the top, L- = Line from the bottom.

misprints 6 (N). 8 Oct. 2003. Communicated by Goo Ishikawa.

R. Montgomery, A Tour of Subriemannian Geometry, Their Geodesics and Applications. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 91, 2002. P177. L+18. $H\frac{d}{dt}\psi \longrightarrow H\psi$

misprints 5 (N). 4 July 2003. Communicated by Jiro Adachi.

R. Montgomery, A Tour of Subriemannian Geometry, Their Geodesics and Applications. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 91, 2002.

まず，これは少し注意しなければいけないと思うのですが， どこからか，“type (n,k)” と “with growth vector (a,b)” が 混乱していると思います．例えば， P86. L-11. の type(3,5) and of (2,3,5) は，growth vector だと思います．あと，ミスプリントと思われるのは，次のものです．

P86. L-3. $w\colon \mathcal{E}^\perp \to \bigwedge^2 \mathcal{H}^* \longrightarrow w\colon \mathcal{E}^\perp \to \bigwedge^2 \mathcal{E}^*$

P86. L-3. $\bigwedge^2 \mathcal{H} \to TQ/\mathcal{E} \longrightarrow \bigwedge^2 \mathcal{E} \to TQ/\mathcal{E}$

P87. L+15. $P\mathbb{H}_q \longrightarrow P\mathcal{H}_q$

P87. L-7. $\ker(w(\lambda) \longrightarrow \ker(w(\lambda))$

P87. L-3. 5.4 $\longrightarrow$ 5.5

misprints 4 (N). 25 June 2003. Communicated by Goo Ishikawa.

R. Montgomery, A Tour of Subriemannian Geometry, Their Geodesics and Applications. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 91, 2002.

P60. L+2. $\Phi \longrightarrow \Psi$
P60. L+19. $\lambda \longrightarrow \lambda_1$

misprints 3 (N): 6 June 2003. Communicated by Jiro Adachi.

R. Montgomery, A Tour of Subriemannian Geometry, Their Geodesics and Applications. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 91, 2002.

P51. L-2. $\mathcal{I}^{(s)} \longrightarrow \mathcal{I}^{(r)}$
p77. L+16. $Gl(n) \longrightarrow GL(n)$ p77. L-11. $(n, n-1) \longrightarrow (n-1, n)$
p78. L+3. $\omega_q \longrightarrow \omega(q)$
P79. L-6. $T_qQ \longrightarrow T_mM$
p79. L-2. $\sum dp_n + \sum p_i dp^i \longrightarrow dq^n + \sum p_i dq^i$
p80. L+6. $Gr_s(\mathcal{H}) \longrightarrow Gr_\ell(\mathcal{H})$
p81. L+11. $\mathcal{E}^2 = [\mathcal{H}, \mathcal{H}] \longrightarrow \mathcal{E}^2 = \mathcal{H} + [\mathcal{H}, \mathcal{H}]$
p81. L+11. $\mathcal{E}^3 = [\mathcal{E}, \mathcal{E}] \longrightarrow \mathcal{E}^3 = \mathcal{E}^2 + [\mathcal{E}^2, \mathcal{E}^2]$
p81. L+11. $\mathcal{H}^{r+1} = [\mathcal{E}^r, \mathcal{E}^r] \longrightarrow \mathcal{E}^{r+1} = \mathcal{E}^r + [\mathcal{E}^r, \mathcal{E}^r]$
p81. L-13. alway $\longrightarrow$ always
p82. L+13.（表はかぞえていません） $\dim(M) \longrightarrow \dim(N)$
p83. L+8. $M \times N \to N \longrightarrow M \times N \to M$
p83. L+9. $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^s)$

misprints 2 (N). 6 June 2003. Communicated by Goo Ishikawa.

R. Montgomery, A Tour of Subriemannian Geometry, Their Geodesics and Applications. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 91, 2002.

P51. L+8. $\mathcal{H}^2 = [\mathcal{H}, \mathcal{H}] \longrightarrow \mathcal{H}^2 = \mathcal{H} + [\mathcal{H}, \mathcal{H}]$
P51. L-7. $\mathcal{E}^3 = [\mathcal{H}^2, \mathcal{H}^2] \longrightarrow \mathcal{E}^3 = \mathcal{H}^2 + [\mathcal{H}^2, \mathcal{H}^2]$
P51. L-7. $\mathcal{E}^j = [\mathcal{E}^{j-1}, \mathcal{E}^{j-1}] \longrightarrow \mathcal{E}^j = \mathcal{E}^{j-1} + [\mathcal{E}^{j-1}, \mathcal{E}^{j-1}]$

misprints 1 (N). 29 May 2003. Communicated by Goo Ishikawa.

R. Montgomery, A Tour of Subriemannian Geometry, Their Geodesics and Applications. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 91, 2002.

P4. L-2. defined define $\longrightarrow$ defined
P42. L+27. $C_1, C_2, C_3 \longrightarrow C_1, C_2, \epsilon_3$
P42. L+29. $\psi_1(0) = 1 \longrightarrow \phi(0) = 1$
P43. L+13– P44. L+4. $C_3 \longrightarrow C_2$
P43. L-5. $\dot{y}_3 \leq C_3 \longrightarrow \dot{y} \leq C_2$
P52. L+9. $\mathcal{H}^j = [\mathcal{H}, \mathcal{H}^{j-1}] \longrightarrow \mathcal{H}^j = \mathcal{H} + [\mathcal{H}, \mathcal{H}^{j-1}]$

【 関連情報 】

非ホロノーム幾何関連テキスト

R. Montgomery, M. Zhitomirskii, Geometric approach to Goursat flags, Ann. Inst. H. Poincaré, 18–4 (2001), 459–493.

R.L. Bryant, L. Hsu, Rigidity of integral curves of rank 2 distributions, Invent. math. 114 (1993), 435–461.

基本文献：
泉屋周一，石川剛郎著「応用特異点論」共立出版.

木村英紀著「制御工学の考え方」ブルーバックス B-1396，講談社.

William P. Ziemer, Weakly Differentiable Functions, Graduate Texts in Math., 120, Springer-Verlag, 1989.

モチーフ積分関連テキスト

J. Denef, F. Loeser, Geometry on arc spaces of algebraic varieties. European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000), 327–348, Progr. Math., 201, Birkhauser, Basel, 2001. link Valery Alexeev, Motivic Integration according to Batyrev, Konsevich, Denef-Loeser. August 21, 2001. 7pages. (兵庫教育大の小池敏司さんからの提供です． ハードコピーがあります．郵送を希望される方は僕 (石川) まで e-mail で連絡してください).

Gusein-Zade, Luengo, Hernandez, An exponential function on the set of varieties, AG/0206279 (鹿児島大の大本亨さんからの情報です).

Willem Veys, Zeta functions and 'Kontsevich invariants' on singular varieties, arXiv : math.AG/0003025

J. Denef, F. Loeser, Motivic integration and the Grothendieck group of pseudo-finite fields, arXiv : math.AG/0207163

Miles Reid, La correspondance de McKay, Séminaire Bourbaki, 52ème année, novembre 1999, no. 867, Astérisque 2000.

基本文献：

石井志保子著「特異点入門」シュプリンガー・フェアラーク東京.

吉永，福井，泉著「解析関数と特異点」特異点の数理３，共立出版.

D. Mumford, The Red Book of Varieties and Schemes, Lecture Notes in Math., 1358, Springer-Verlag, 1988.

● E-mail 勉強会の具体的な進め方 (案)

(1) １つ (または複数) の論文を決めて，参加者全員がめいめい読む．期間を決めて読む．何か連帯感が生まれてきて楽しい．オブザーバーは，おもしろそうだなあ，という時点で読みはじめる， (読まなくてもよい)，ということで， 拘束力はまったくない (拘束されて数学したくないので) 形式にします.

(2) この過程で，質問や知見を e-mail で出し合いそれを公開し， 各人の理解を深めていく， それだけで十分やりがいがあるかな，と考えています． 具体的方法としては， 論文を読んだ報告・質問・感想・意見 (場合によっては言い訳) を僕 (石川) あてにメールしてもらって,「勉強会で公開してもよいという部分について， 改めて，メーリングリスト全員にメールする． ときどきまとめて，Web page にのせておいて 参照してもらう」という形にします.

「１つの論文を分担して読む」のも良いですが， 分担すると，読み手の理解内容を共有するために，その分担した人が 何かレポートを書かなければいけなくなり， 負担がかなり大きくなると予想できるので，やめました．(本業第一!)

以上.