幾何学５ (多様体の幾何とトポロジー) 質問の回答 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
No. ９ (２００２年１２月１３日) の分

問． 前回の「２を法とした写像度」のところでは，たとえば「恒等写像と定値写像は可微分ホモトピックでない」ということが $\deg_2$ の値の違いから判断できました．今回の Brouwer の写像度 $\deg(f)$ は $\sum_{x_0\in f^{-1}(y_0)} \mathrm{sign}(f_*)_{x_0} \in \mathbf{Z}$ で定義されていますが，この値によって写像がどのように分類 (可微分ホモトピックである/ない etc) されるのでしょうか？

答． 明けましておめでとう．今年もよろしく．連絡事項ですが，来週 (１月２４日) は休講です．出張で函館に行ってきます．さて回答ですが，良い質問ですね．n 次元球面 S^n から S^n への可微分写像のホモトピー類は，写像度によって完全に分類されることが知られています．講義で説明する予定です．

問． Brouwer の写像度は，$S^1 \to S^1$ で正則値 y を実質的に通過する回数の，高次元版と考えてよいのでしょうか？

答． まったくその通りです．

問． Brouwer の写像度の定義のために準備した $(f_*)_{x_0} : T_{x_0}M \to T_{f(x_0)}N$ が向きを保つときに $\mathrm{sign}(f_*)_{x_0} = +1$ と決めましたが，従来やっている sgn : 置換群の符号とみてよいのですか？

答． 置換の符号と行列式は違うものです．でも確かに深い関係がありますね．というのは，$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ が与えられると，自然に，基底の置換 $u_1, u_2, \ldots, u_n \to u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \ldots, u_{\sigma(n)}$ を誘導しますが，その表現行列の行列式は，偶置換のとき正，奇置換のとき負です．ちなみに，sign も sgn もともに「signature」の略です．

問． $(f_*)_{x_0}$ が向きを保つが，保たないかを調べて $\mathrm{sign}(f_*)_{x_0}$ を足し合わせて $\deg(f; y_0) = 0$ となることはありますか？また，$\deg(f; y_0) = 0$ であるとは，何を意味しますか？

答． あります．$\deg(f; y_0) = 0$ は，定義通り，y_0 に写る正則点のうち，f が向きを保つものの個数と，向きを保たないもの個数が等しいことを意味します．

問． 写像度はホモトピー不変量であるということなのですか？

答． そういうことです．

問． いろいろな整数値をとる $\deg(f)$ に対して，”不変量”という言葉で表現されているのが理解できませんでした．

答． 「不変量」という用語は，ある同値関係 (連続写像に関する「ホモトピック」という同値関係，可微分写像に関する「可微分ホモトピック」という同値関係，位相空間に関する「ホモトピー同値」という同値関係，多様体に関する「微分同相」という同値関係，群に関する「群同型」という同値関係，などなど) を決めたときに使う言葉であり，同値なものの値が同じ，つまり変わらない，という量 (や数) のことを言います．したがって，写像度は，(いろいろな写像について) いろいろな整数値をとるわけですが，可微分ホモトピックなら同じ値になるので，(可微分という文字は省略して) ホモトピー不変量と呼んだわけです．

問． 可微分ホモトピックならば $\deg(f) = \deg(g)$ なのですか？それとも $\deg(f)$ が f のホモトピー不変量だから，$\deg(f) = \deg(g)$ なのですか？

答． f と g が可微分ホモトピックならば $\deg(f) = \deg(g)$ です．このことを称して「写像度はホモトピー不変量である」と言います．ホモトピー不変量にはいろいろありますが，写像度はそのひとつである，という意味です． $\deg(f)$ が f のホモトピー不変量だから，$\deg(f) = \deg(g)$，という言い方は本末転倒です．数学では論理が大切です．論理の流れを押さえておきましょう．

問． $\deg(f)$ (Brouwer の写像度): ホモトピー不変量 $\Rightarrow$ $\deg_2(f)$: ホモトピー不変量，とはならないですよね？

答． 良い質問ですね．なります．Brouwer の写像度が定義される場合 (多様体が向きづけ可能なとき)，$\deg(f)\mathrm{mod}.2 \equiv \deg_2(f)$ なので，$\deg(f)$ に関する結果から $\deg_2(f)$ の結果が導かれます．ただし注意してほしいのは，向きづけ不可能な場合は，(あるいは，向きづけ可能か不可能か不明の場合，向きを保つかどうか不明の場合などは)，$\deg_2(f)$ だけが有効であるということです．($\deg(f)$ は使えない)．

問． arc というのは何者ですか？今までの講義のノートを見返してみたのですが,「arc」の定義がなかったと思います．

答． 弧 (こ)，あるいは円弧です．ここでは，境界つき１次元コンパクト多様体の連結成分のうち，ゼロイチ区間 $[0, 1]$ と微分同相なもののことをそう呼びました．説明不足でしたね．ごめんね．ちなみに，S^1 と微分同相なものを circle (円周) と呼びます．ただし，ネーミングは問題意識に依存するので，あくまで微分トポロジーでの言葉づかいであると認識しておいてください．(たとえば，本当の circle や arc だけをそう呼ぶ場合もあるし,「arcwise connected」という場合の arc は，$[0, 1]$ からの連続写像による像を意味しますね)．

問． $F^{-1}(y_0)$ の各 arc A について $\partial A = \{a\} \cup \{b\}$ とした a, b に対して, $\mathrm{sign}(f_*)_a + \mathrm{sign}(f_*)_b = 0$ について教えてください．数学的にちゃんと証明してみてください．

答． 証明しましょう．まず A (１次元多様体) の向きをきめます．A の $x \in A$ での接ベクトル $\mathbf{v}$ が正の基底であるのは，X の正の基底 $\mathbf{v}, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n+1}$ があって，$(F_*)_x(\mathbf{v}_2), \ldots, (F_*)_x(\mathbf{v}_{n+1})$ が $T_{y_0}N$ の正の基底であるとき，と定めます．(一般に，向きづけられた多様体から向きづけられた多様体への可微分写像の正則値の逆像について同様に向きが定まります)．さて，A 上で，正の向きをもつ可微分 (したがって連続的) ベクトル場 $\mathbf{v}(x)$ を考えると，それは，１つの端点 (たとえば b) で内向きなら，もう１つの端点 (a) で外向きです．このとき，境界の向きの定め方 (と上の定義) と比べてみると，点 b では，$(f_*)_b : T_b\partial X \to T_{y_0}N$ は向きを保たないことになり，$\mathrm{sign}(f_*)_b = -1$ となります．同様に，a では $\mathrm{sign}(f_*)_a = 1$ となります．したがって，$\mathrm{sign}(f_*)_a + \mathrm{sign}(f_*)_b = 0$ です．

問． 「各 arc A について $\partial A = \{a\} \cup \{b\}$」の a, b は A の端点ですか？多分，$F^{-1}(y_0)$ が１次元コンパクト多様体より，◯ と ＿ で構成されていることがわかって $F^{-1}(y_0)$ 中 M に属するのが各 arc の端点より $+1$ と -1 のペアができるので $\deg(f, y_0) = 0$ ということだと思います．

答． まったくその通りです．

問． arc というのは１年のときにやった arcsin (Sin^{-1}), arccos (Cos^{-1}) の arc のことですか？逆写像のことですか？

答． 数学的な意味は関係ないですが，語源的には関係しますね．というのは，arcsin などは，sin の値から角度 (弧度法では弧の長さ arc length) を求める関数という意味で使われているからです．逆写像とは全く関係ないです．

問． 向きづけが少しわかりませんでした．

答． 境界のついた円筒 (cylinder) の場合に，詳しく説明してみましょう．まず，円筒自体に向きを入れるわけですが，円筒の外向きベクトルをもとに向きをいれます．つまり，円筒の各点 x (境界点でもよいですが，境界点以外を想定すると考えやすい) の外向き法線ベクトル $\mathbf{n}$ と，接平面 T を考えます．円筒の向きをきめるには，T の向きをきめる，つ

まり，正の基底の取り方をきめるわけですが，L の基底 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ が正の基底であるというのは，$\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ が $\mathbf{R}^3$ の正の基底 (標準的な基底と同じ向き) であること，ときめているので，確かに T の向きがきまります．このことは x が円筒の境界点でもあてはまります．さて，円筒に接していて境界に関して外向き法線ベクトル $\mathbf{n}'$ と，境界の接線 L を考えます．円筒の境界 (２つの円周からなる) の向きをきめるには，L の向きをきめる，つまり，正の基底の取り方をきめるわけですが，L の基底 $\mathbf{w}$ が正の基底であるというのは，$\mathbf{n}', \mathbf{w}$ が T の正の基底，つまり，$\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{w}$ が $\mathbf{R}^3$ の正の基底であること，ときめているので，確かに L の向きがきまるわけです．

問． 講義中で，$\partial([0,1] \times M) = \{0\} \times M \cup \{1\} \times M$ となったのは，$\partial([0,1] \times M) = \partial[0,1] \times M \cup [0,1] \times \partial M$ で $\partial M = \emptyset$ となるからでしょうか？

答． その通りです．もちろん，上の公式を書くには，$\partial M \neq \emptyset$ の場合に，$\partial([0,1] \times M)$ とは何かを明確にしておく必要がありますが．(関連用語：角つき多様体).

問． 微分同相写像 $h : N \to N$ が id_N とイソトピックであるとき，$\deg(h) = \deg(\mathrm{id}_N)$ は成り立ちますか？定理 B より，$\deg(h) = \deg(\mathrm{id}_N)$ となるのでしょうか？

答． 成り立ちます．$\deg(h) = \deg(\mathrm{id}_N) = 1$ です．ところで，定理 B の証明の途中に出てくることなので,「定理 B より，$\deg(h) = \deg(\mathrm{id}_N)$ となる」というのは本末転倒です．

問． Th A, B の証明において $\deg(h \circ f; z_o) = \deg(f; z_0)$ でどのように補題をつかっているかわかりません．$h \circ f$ と f がホモトピーで結ばれることになるんですよね．

答． そうです．h と id を結ぶホモトピーを $H(y,t)$ ただし，$H : N \times [0,1] \to N$ としたとき，$H(f(x),t)$ つまり，$H \circ (f \times \mathrm{id}) : M \times [0,1] \to N$ は $h \circ f$ と f を結ぶホモトピーです．

問．「h は id_N とイソトピックなので向きを保つ」とありますが，今まで恒等写像について向きのことまで考えていませんでした．例えば，N とすべての向きが逆な N' (向き以外はすべて N と同じ) ものがあって，$h : N \to N'$ となる h は恒等写像ではない，ということで良いでしょうか？

答． よい質問ですね．恒等写像は，どんな向きを入れても恒等写像です．恒等写像なのですが，値域の向きを逆にすれば向きを保ちません．向きづけられた多様体という場合は，必ず，向きは１つに固定しているわけです．

問． 向きづけ可能な多様体において，その向きが多様体全体に影響を及ぼすことはあるのですか？

答． どちらかというと，多様体の構造は「下部構造」，いわば土台であり，その上に「向き」の構造をのせると考えてください．たとえると，多様体は「かべ」であり，向きは「かべ紙」です．かべ紙の色は２色しかなく，赤か青です．赤いかべか，青いかべか，の２通りです．かべの形は，かべ紙の色では変わりません．ただし，以前もお話ししたように，向きの構造を入れることができる多様体と，できない多様体があります．かべ紙が張れるかべもあれば，かべ紙が張れないかべもあるということです．

問． 前回の回答で，第 m 成分が負だと外向きのベクトルで，正だと内向きのベクトルとありますが，どちらでもない場合や，連続的に定まらない場合はどうすればよいのですか？

答． どちらでもない場合，つまり，第 m 成分が負でも正でもない，つまり，第 m 成分が 0 の場合，そのベクトルは境界に接するベクトルです．外向きベクトルが境界に沿って連続的に定まらない場合はありません．

問． 可微分写像 $f : M \to N$ で，M の compact 性はイメージでよくわかりますが，M の行き先の N の連結性がわかりません．それから，f はもちろん連続なので，M が compact のとき，N でも compact 性は保証されると思います．

答． f は全射でないかも知れないので違います．例として，$M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}, N = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 2\}$ を考えましょう．(図示してください)．$f : M \to N$ を $f(x,y) = (x+2, y)$ で定めると，f は可微分写像で，M はコンパクトで，N は連結でもないし，コンパクトでもありません．ただし，像 $f(M)$ がコンパクトになる，という主張は正しいですね．

問． M, N は境界なし，M はコンパクト，とありました．M がコンパクトということは M が有界閉集合ということですよね？それなのに境界がなくなることがあるのですか？

答． あります．たとえば，球面を考えてください．球面は有界閉集合ですが，境界はありません．だだし，多様体の「境界」の定義は，ユークリッド空間の部分集合の境界の定義とは異なることを思い出しておきましょう．(復習ポイント：「ユークリッド空間の部分集合の境界点」と「多様体の境界点」).

問． 境界つき多様体の境界は多様体ですか？

答． そうです．境界つき n 次元多様体の境界は (境界なし) $n-1$ 次元多様体です．講義ノートの「境界つき多様体」の項を参照．

問． コンパクトという感覚がわかりません．定義どおりに考えてみるとわからなくなることが多すぎます．

答． とりあえず，ユークリッド空間の有界閉集合をイメージしてください．有界閉集合の定義を思い出しましょう．定義を知らないと，定義通りに考えることはできません．(復習ポイント：有界閉集合，ユークリッド空間の有界閉集合はコンパクト).

問． ホモトピーとはどういうものだと考えればよいのですか？

答． 写像を連続的に変形するものです．

問． 時間的に変化する多様体はありますか？

答．「時間」という意味あいは別として，変化する多様体の族を考えることはしばしばあります．たとえば，x-y 平面上の円の族 $x^2 + y^2 = t$ は，時間と共に半径が増加するので，時間的に変化する多様体ですね．

問．「$\deg(f,y), (y \in U)$ は一定 $\Rightarrow \exists \in U$ は F の正則値」について．

答． たぶん板書を写すときの間違いだと思いますが，$\deg(f,y), (y \in U)$ は一定である．一方，$\exists \in U$ は F の正則値... ということです．

問． Manifold は何故多様体なのですか？ Variety は語感として多様な感じがしますが，Manifold はそんな感じがありしません．なぜこの訳語なのでしょうか？

答． manifold も variety も フランス語では variété と言うので，フランス語からの訳かも知れませんね．

問． ブラウワーという名前は論理学の本でも見たことがあるのですが同一人物なのでしょうか？

答． たぶん違う人物でしょう．たとえると，Honda さんが全員オートバイを作っているわけではないのと同じです．ところで，いよいよ，この講義も大詰めに差しかかってきました．これからのキーワードは「多様体の上のベクトル場」です．ではまた再来週．